Europese Callopties

Arald de Wilde

ardwilde@cs.vu.nl

BWI-werkstuk

Vrije Universiteit
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Bedrijfswiskunde en Informatica
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam

Juli 2006

Voorwoord

Voor u ligt een zogenaamd BWI-werkstuk. Dit werkstuk is één van de papers die de eindstreep inluiden van de masterstudie Bedrijfswiskunde en Informatica. Hoewel de informatica in deze paper niet erg ruim aan bod komt, kan deze paper door de bedrijfskunde en de wiskunde die gebruikt wordt, worden gezien als één van de vele representatieve producten van vijf jaar studeren.

Het bedrijfskundige deel in deze paper omvat uitleg over de optietheorie wat in het eerste hoofdstuk uit de doeken wordt gedaan, het tweede hoofdstuk bevat het wiskundige deel; namelijk de afleiding van de Black-Scholes formule voor calloptieprijzen. En in het derde deel onderzoeken we of deze formule ook werkelijk toepasbaar is in de praktijk door berekende optieprijzen te vergelijken met werkelijke optieprijzen.

Naast het toewensen van veel leesplezier wil ik ook graag Menno Dobber bedanken die het schrijven van deze paper heeft begeleid. Zijn flexibele manier van begeleiden heb ik zeker gewaardeerd!

Arald de Wilde
Juli 2006

Samenvatting

In deze paper wordt uitvoerig onderzoek gedaan naar Europese callopties. In hoofdstuk 2 blijkt dat onder enkele aannames de return van een aandeel goed gemodeleerd kan worden met een term voor de drift en een term voor de spreiding van het aandeel. Ook blijkt dat de prijs van een calloptie op de vervaldatum triviaal is en kan worden weergeven in een expliciete formule. Verder wordt duidelijk dat niet alleen in een perfecte markt maar ook in een imperfecte markt het handelen in opties van toegevoegde waarde is voor kapitaalmarkten. Dit is niet alleen te danken aan transactiekosten die bij elke aandelentransactie een rol spelen, maar ook aan het te hoeven opereren op slechts één markt.

In hoofdstuk 3 wordt de Black-Scholes formule ontleed waarbij een impliciete formule voor de prijs van een optie op elk gewenst tijdstip wordt afgeleid. Door deze formule na enkele berekeningen om te zetten in de bekende diffusievergelijking verkrijgen we een expliciete formule voor de prijs van een Europese calloptie.

In hoofdstuk 4 blijkt dat de verkregen formule niet slechts theoretisch goed onderbouwd is, maar ook in de praktijk voor betrouwbare benaderingen van de werkelijke optieprijs zorgt. Vergelijkingen tussen werkelijke en berekende optieprijzen voor optieseries van ING geven een smalle range van relatieve errors.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

Het was op een doordeweekse herfstmiddag in 1969 toen de toegepaste wiskundigen Black en Scholes opeens een ingeving kregen die de hele financiële wereld in één klap op zijn kop zette. De samenwerking van deze genieën blijkt tot op vandaag nog steeds van onschatbare waarde te zijn. Deze heren presenteerden namelijk een waterdicht model waarmee, gegeven de prijs van een bepaald aandeel, de exacte prijs van een optie kan worden vastgesteld. Aangezien de vraag hoe een optie te prijzen vandaag de dag nog altijd actueel is, zullen we in dit essay een wiskundige zoektocht houden om de volgende vraag te beantwoorden: *"Wat is de prijs van een Europese calloptie gegeven de prijs van het onderliggende aandeel?"* Om deze vraag te beantwoorden maken we gebruik van het boek Option Pricing [7] geschreven door Wilmott et al.

Er wordt op diverse wetenschapsgebieden onderzoek gedaan naar het zo accuraat mogelijk benaderen van optieprijzen aan de hand van de prijs van het onderliggende aandeel. Zo hebben Bertsimas en Popescu in [1] diverse boven- en ondergrenzen voor optieprijzen vastgesteld aan de hand van convexe optimalisatieproblemen. Maar niet alleen de wiskunde houdt zich bezig met de optietheorie, ook de kunstmatige intelligentie draagt verschillende oplossingen aan. Zo wordt er regelmatig gebruik gemaakt van evolutionaire rekenmethoden. Chen et al. presenteren in [3] een genetisch algoritme die zij vergelijken met andere benaderingsstrategiën. Mede omdat blijkt dat deze strategiën onder doen voor de Black-Scholes vergelijking, zullen we ons in deze paper slechts richten op deze beroemde formule van de heren Black en Scholes. Na het afleiden van desbetreffende formule zullen we de accuraatheid van de resultaten onder de loep nemen om te onderzoeken of de theorie ook in praktijk opgaat.

Om tot hun bekende formule te komen hebben de heren Black en Scholes twee aannames gemaakt: de prijs van het aandeel maakt een geometrische Browniaanse beweging en er kan geen risicovrije winst worden gemaakt. De tweede aanname spreekt uiteraard voor zich en zal in verschillende verschijningsvormen telkens weer opduiken, maar de eerste aanname dient nog wel even wat uitgew-

erkt te worden. Een geometrische Browniaanse beweging, ook wel exponentiële Browniaanse beweging genoemd, is een continu stochastisch proces waarbij het logaritme van de random variabele een Browniaans pad volgt. Het Browniaanse pad dat wordt gevolgd is een Wiener proces wat op zijn beurt weer één van de bekendste Lévy processen is. Stochastische variabelen vormen een Wiener proces als het verschil in de waarde van een stochast tussen het huidige tijdstip en een volgend tijdstip, gegeven de waarde op het huidige moment, normaal verdeeld is. We zullen hier verder in dit essay nog dieper op in gaan. Daarnaast zullen we, gegeven deze aannamen, een sluitend bewijs afleiden voor de prijs van een optie.
Maar voordat we zover zijn, zullen we eerst wat duidelijkheid scheppen over wat nu precies Wiener processen, Europese call opties en andere termen inhouden.

Hoofdstuk 2

Optietheorie

Er bestaan vele producten op de financiële markt. Eén categorie daarvan omvat de aandelen. Zoals de naam al zegt, is de bezitter van een aandeel voor een klein gedeelte eigenaar van een onderneming. Hoewel hier vaak geen rechten aan toe worden gekend, is de aandeelhouder wel eigenaar van een bepaald percentage van het eigen vermogen van een onderneming. Hierdoor zal, als de onderneming winst maakt, de aandeelhouder direct door dividend, of indirect door investeringen, profiteren. De andere kant van de medaille is dat als de onderneming failliet raakt, de aandeelhouder de kans loopt dat hij zijn in het bedrijf gestoken kapitaal ook kwijt raakt. Aangezien het geen enkel probleem is om publieke aandelen te kopen en verkopen, ontstaat er een levendige handel als er sprake is van vooruitgang in het bedrijf of andersom, als het bedrijf even minder presteert. Het is niet verwonderlijk dat de prijs van het aandeel niet slechts afhangt van de werkelijke waarde dat dit aandeel heeft, maar dat deze prijs ook sterk afhangt van de marktwerking. Hoewel deze twee prijstechnieken sterk gerelateerd zijn, is het uiteraard niet ondenkbaar dat als een onderneming verlies maakt haar aandelen in prijs toenemen. Om enig grip te krijgen op prijzen van aandelen nemen we allereerst aan dat alleen het recente verleden volledig wordt weergegeven in de huidige prijs en dus geen verdere informatie van invloed is op de aandeelprijs. Verder geldt dat de markt onmiddellijk reageert als er nieuwe informatie beschikbaar is over een bepaald aandeel.

Met deze aannames op zak kunnen we na enig denkwerk een goed model voor de prijs van een aandeel opstellen. Uiteraard gaat het bij een verandering van de aandeelprijs niet om de absolute verandering, maar zegt de relatieve verandering veel meer. Deze zogenaamde return definiëren we als de verandering van de prijs gedeeld door de originele prijs. Stel dat nu op tijd t de prijs van het aandeel gelijk is aan S en laat nu een kleine tijd later, $t + dt$, de prijs van het aandeel veranderd zijn naar $S + dS$. De vraag is dan hoe we de bijbehorende return dS/S kunnen modelleren. Dit is mogelijk door deze return op te splitsen in twee delen: een voorspelbaar deterministisch deel en een random onvoorspelbaar deel. Dit eerste deel wordt ook wel de drift van het aandeel genoemd wat we weergeven met $\mu\ dt$. Het tweede deel representeert de random verandering van het aandeel zoals onverwachts nieuws. Dit geven we weer met $\sigma\ dX$ waarbij σ de spreiding van de returns weergeeft en dX een trekking is uit een normale verdeling. Deze laatste term, die de willekeurigheid van het aandeel representeert, staat ook wel bekend als een Wiener proces. Zo'n proces heeft als eigenschappen dat dX een random variabele uit een normale verdeling is, het gemiddelde van dX gelijk is aan nul en de variantie van dX gelijk is aan dt. We kunnen dX dus schrijven als $dX = \phi\sqrt{dt}$, waarbij ϕ een random variabele uit de standaard normale verdeling is. Het blijkt dat we door deze uitdrukkingen de return van een aandeel kunnen definieren als:

$$\frac{ds}{S} = \sigma dX + \mu dt. \tag{2.1}$$

Merk op dat als $\sigma = 0$, de return slechts afhangt van de drift waardoor S te vergelijken is met een bedrag dat voor een bepaald renteperentage op een bank wordt gezet.
Hoewel blijkt dat er in de aandelenmarkt al genoeg te beleven is, zijn er van deze basismarkt vele ander financiële producten afgeleid. Een belangrijke categorie hiervan is de optiemarkt. Deze optiemarkt omvat weer diverse producten waarvan de eenvoudigste de Europese call optie is. Een Europese call optie is een contract waarbij er een bepaalde tijd in de toekomst wordt vastgesteld, de zogenaamde vervaldatum. Op dit tijdstip T mag de eigenaar een bepaald aandeel voor de vooraf vastgestelde prijs E kopen. Let wel, de eigenaar van de optie mag het aandeel kopen, maar hoeft dat niet. Dit in tegenstelling tot de eigenaar van het onderliggende aandeel; als de optiehouder het aandeel wil kopen, dan heeft de optiehouder, ook wel optieschrijver genoemd, de verplichting om dit aandeel aan te bieden voor de vooraf vastgestelde prijs.

De vraag die nu naar voren komt is hoe we een prijs voor deze optie vast kunnen stellen zonder dat één van beide partijen achtergesteld wordt. Om deze vraag te beantwoorden gaan we kijken naar de prijs wanneer het tijdstip t gelijk is aan de vervaldatum T. Stel dat op dat moment de prijs S van het aandeel groter is dan de uitvoeringsprijs E. Het is dan uiteraard verstandig om de call optie te gebruiken en dus E euro's uit te geven om er een aandeel van S euro's voor in de plaats te krijgen. De winst van zo'n transactie is dus $S - E$. Aan de andere kant, stel dat $S < E$ op de vervaldatum. Dan is het dus niet verstandig om de call optie te gebruiken omdat er anders een verlies wordt geleden van $E - S$. Het blijkt dat in dit geval de optie waardeloos is. Als we de waarde van de optie op tijdstip T en met een onderliggend aandeel van prijs S aanduiden met $C(S, T)$ kunnen we uit het voorgaande concluderen dat

$$C(S, T) = \max(S - E, 0). \tag{2.2}$$

Om het nut van een calloptie, maar ook een optie in het algemeen, duidelijk te maken is het noodzakelijk om te weten wat een 'afgeleide' beleggingsvorm, waartoe opties ook behoren, precies inhoudt. Dit wordt onder andere door

Van Hulle en Vanthienen in [6] zorgvuldig uit de doeken gedaan. Zij stellen dat zowel een call- als een putoptie tot de afgeleide beleggingsvormen behoren omdat deze in een perfecte kapitaalmarkt nagemaakt kunnen worden met behulp van andere beleggingsvormen. Het namaken van een optie houdt in dat er een portefeuille samen wordt gesteld zonder opties die onder alle omstandigheden hetzelfde reageert en dus dezelfde opbrengst oplevert als een belegging in de optie. Dit namaakproces kan als volgt worden geïllustreerd: veronderstel dat we een Europese calloptie willen namaken die nog 1 periode als looptijd heeft met een uitoefenprijs van 90 euro waarbij het onderliggende aandeel een beurskoers heeft van 100 euro. Er wordt verondersteld dat op het einde van de periode de aandelenprijs of stijgt naar 120 euro of daalt naar 80 euro. Invullen van (2.2) geeft dat op de vervaldatum de opbrengst van de calloptie of 30 euro bedraagt of 0 euro waard is. Stel dat de risicovrije rente over desbetreffende periode gelijk is aan 10%, dan hebben we, als we aan het begin van de periode 3/4 van een aandeel aankopen en deze aankoop gedeeltelijk financieren door een lening aan te gaan van 54.50 euro, een portefeuille samengesteld die onder alle omstandigheden dezelfde eindopbrengst oplevert als de calloptie: stel dat de aandelenprijs stijgt naar 120 euro, dan wordt de waarde van de portefeuille $120*3/4-54,50*1.1 = 30$ euro; stel dat de waarde van het aandeel daalt naar 80 euro, dan levert deze portefeuille $80*3/4-54,5*1.1 = 0$ euro op. Dit impliceert dat deze portefeuille aan het begin van de periode $100 * 3/4 - 54.51 = 20.50$ euro kost. En dit houdt dus in dat gegeven er geen arbitragemogelijkheden in de perfecte kapitaalmarkt zijn, de beursprijs van de calloptie gelijk moet zijn aan 20.50 euro.
Hoewel het zo lijkt dat opties eigenlijk helemaal niet noodzakelijk zijn, is het zo dat zowel de resterende looptijd, de aandelenprijs, de aandelenvolatiliteit als de risicovrije interestvoet regelmatig veranderen. Hierdoor dient de portefeuille regelmatig aangepast te worden wat dus naast een grote technische kennis, ook een zeer flexibele teogang tot de markt vereist.

De hierboven beschreven duplicatiemogelijkheid suggereert dat, wanneer het zonder beperking samenstellen van bepaalde portefeuilles voor iedereen mogelijk zou zijn, optiemarkten vermoedelijk weinig economisch nut zouden hebben.
De reden voor het bestaan van reële optiemarkten komt dus onder andere voort uit de marktimperfecties waardoor een perfecte samenstelling in de praktijk niet mogelijk is. Maar ook in perfecte markten spelen opties nog zeker wel een rol omdat uit optieprijzen extra informatie kan worden afgeleid over bepaalde toekomstvenvachtingen die de markt heeft.

Een eerste belangrijke marktimperfectie waardoor reële opties extra nut krijgen zijn de transactiekosten. Zoals al eerder vermeld veronderstelt het namaken van opties door het samenstellen van portefeuilles dat continu de desbetreffende duplicerende portefeuille wordt aangepast. In reële markten veroorzaken zulke aanpassingen transactiekosten waardoor dit systeem van samenstellen behoorlijk duur kan uitvallen. Daarbij zorgen deze transactiekosten er ook nog voor dat het in de praktijk moeilijk wordt nauwkeurig de uiteindelijke opbrengst van

een optie na te maken. Een andere reden waarom de optiemarkt zeker wel bestaansrecht heeft is dat zo'n zogenaamde duplicatieprocedure veronderstelde dat aandelenprijzen door de tijd evolueren zonder al te grote schokken. Bij plotselinge grote wijzigingen, zoals in oktober 1987 en 1989, blijken samengestelde opties dan ook maar namaak te zijn.
Een tweede marktimperfectie die via reële opties omzeild wordt zijn de zogenaamde ontleenbeperkingen. We hebben al eerder gezien dat elke keer wanneer er een call optie is gekocht, er eigenlijk impliciet aandelen worden aangekocht die gedeeltelijk worden gefinancierd met geleend geld. Over het algemeen verlopen werkelijke, expliciete ontleentransacties veel minder soepel dan wat vaak wordt gedacht. De verplichting van optiebeurzen om fondsen te deponeren als borg voor de goede uitvoering van de optiecontracten doen deze impliciete ontleenmogelijkheid we1 gedeeltelijk teniet.
In vergelijking met het samenstellen van een bepaalde portefeuille, hebben reële opties nog het voordeel van efficiëntie: in plaats van op de aandelenmarkt én de rentemarkt transacties te moeten uitvoeren, is het voldoende enkel op de optiemarkt te opereren.
De zojuist geformuleerde argumenten laten dus duidelijk de noodzaak van een optiemarkt zien, en laten dus ook zien dat het namaken van opties praktisch haast onmogelijk wordt.

Om de grote lijn duidelijk voor ogen te houden, zijn er eerst nog wat aannames noodzakelijk. Allereerst nemen we, zoals eerder vermeld, aan dat de prijzen van een aandeel een Wienerproces vormen, oftewel een lognormaal random verloop vertonen zoals dit wordt uitgedrukt in (2.1). Verder is er een van te voren bekende constante interest rate. Ook is de spreiding van het aandeel een vooraf bekende functie over de tijd. We nemen ook aan dat er geen transactiekosten worden gemaakt tijdens het kopen of verkopen, ook wel schrijven genoemd, van aandelen en/of opties. Daarnaast wordt er geen dividend uitgekeerd, en is er ook geen sprake van dividenduitkering in de toekomst. Uiteraard nemen we ook aan dat er geen risicovrije winst gemaakt kan worden. Dit impliceert dat alle risicovrije portfolio's dezelfde return uitkeren. Een andere belangrijke aanname is dat de handel in een onderliggend aandeel continu kan plaatsvinden, in elke kwantiteit en zelfs als we geen eigenaar zijn van deze aandelen. Dit laatste wordt ook wel ongedekte handel genoemd. Hoewel het lijkt dat sommige aannames de generalisatie van ons model sterk reduceren, is dit niet het geval. Want hoewel we ons model binnen deze grenzen zullen houden, is het mogelijk gebleken om met relatief kleine uitbreidingen de aannames over dividenduitkering en transactiekosten mee te nemen in de berekeningen.

Hoofdstuk 3

Optieprijzen

In dit hoofdstuk zullen we de vraag proberen te beantwoorden wat de prijs van een Europese calloptie is, gegeven de prijs van het onderliggende aandeel. We zullen dit doen door een expliciete formule voor de prijs van een calloptie afleiden. Veronderstel dat $C(S,t)$ een continue functie is van de calloptieprijs C met als parameters de prijs van het aandeel S en tijd t. Als we S en t met een kleine hoeveelheid laten veranderen, dan zal C ook met een kleine hoeveelheid toenemen. Door C te schrijven als een Taylorreeks, kunnen we dC definieren als

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2C}{dS^2}dS^2 + \ldots, \tag{3.1}$$

waarbij een term in de rest van de reeks over S of t altijd kleiner is dan de voorgaande termen over S of t. Het blijkt dat de termen van deze reeks al zeer snel naar 0 convergeren. Dit wordt veroorzaakt doordat $dX^2 \to dt$ als $dt \to 0$. Als we dit resultaat gebruiken tijdens het invullen van de termen in (3.1) wordt het allemaal geheel duidelijk. dS hebben we gedefinieerd in (2.1), dS^2 wordt is dan dus gelijk aan $\sigma^2 S^2 dX^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dX + \mu^2 S^2 dt^2$. Als we nu orde van grootte bekijken van elk van deze termen afzonderlijk zien we dat de eerste term het grootst is voor kleine dt aangezien $dX = O(\sqrt{dt})$. Dus in orde van grootte kunnen we schrijven $dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2 + \ldots$. En omdat $dX^2 \to dt$, kunnen we schrijven $dS^2 \to \sigma^2 S^2 dt$. Als we deze resultaten invullen in (3.1) voor termen groter of gelijk aan $O(dt)$, verkrijgen we voor dC:

$$\begin{aligned} dC &= \frac{\partial C}{\partial S}(\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{dS^2}dt \\ &= \sigma S \frac{\partial f}{\partial S}dX + \left(\mu S \frac{\partial C}{S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial 2C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t}\right)dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dit laatste resultaat is een toepassing van Itô's lemma in [4] waar hij bewijst dat voor elke random variabele G die wordt beschreven door een stochastische differentiaalvergelijking van de vorm $dG = A(G,t)dX + B(G,t)dt$, voor gegeven

$f(G)$ geldt dat

$$df = A\frac{df}{dG}dX + \left(B\frac{df}{dG} + \frac{1}{2}A^2\frac{d^2f}{dG^2}\right)dt.$$

Om de partiële differentiaalvergelijking gegeven in (3.2) op te lossen, stellen we een portfolio samen van één optie en een aantal $-\Delta$ van het onderliggende aandeel. De waarde van deze portfolio Π is dus gelijk aan $C - \Delta S$. En deze veranderd dan in één tijdstap met $d\Pi = dC - \Delta dS$, waarbij Δ uiteraard constant blijft. Als we de resultaten gebruiken die worden gegeven in (2.1) en (3.2), verkrijgen we

$$d\Pi = \sigma S\left(\frac{\partial C}{\partial S} - \Delta\right)dX + \left(\mu S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t} - \mu\Delta S\right)dt.$$

Als we aan het begin van de tijdstap Δ gelijk stellen aan de waarde van $\partial C/\partial S$, verkrijgen we de geheel deterministische vergelijking

$$d\Pi = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt. \tag{3.3}$$

Deze laatste vergelijking kunnen we nog iets explicieter maken door te kijken naar de tijdswaarde van Π. De return van een bedrag Π dat is geïnvesteerd in een risicovrij aandeel zal in een tijd dt groeien met $r\Pi dt$. Als het rechterdeel van (3.3) groter is dan dit bedrag kunnen we een gegarandeerde risicovrije winst maken door een bedrag Π te lenen en dit te investeren in de portfolio. Aan de andere kant, als het rechterdeel van (3.3) is kleiner dan $r\Pi dt$, verkopen we de portfolio en investeren ons geld in de bank. Oftewel, als $r\Pi dt$ niet gelijk is aan het rechterdeel van (3.3), wordt er gegarandeerd risicovrije winst gemaakt of verlies geleden. We kunnen dus stellen dat

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt.$$

Als we dan gebruiken dat Π gelijk is aan $C - S\partial C/\partial S$, kunnen we concluderen dat

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0. \tag{3.4}$$

Deze laatste vergelijking is de beroemde Black-Scholes partiële differentiaalvergelijking die de heren Black en Scholes hebben gepresenteerd in [2] en die geldt voor zowel Europese als Amerikaanse call- en putopties.

Hoewel de prijs van elke calloptie wordt gerepresenteerd door de vergelijking in (3.4), is het zeker geen makkelijke opgave om uit deze vergelijking een expliciete oplossing te berekenen. Maar wat de heren Black en Scholes nog niet wisten toen zij tot hun resultaat kwamen, is dat deze vergelijking op eenvoudige wijze om te zetten is in de algemene diffusievergelijking die wordt gegeven door

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.5}$$

met $-\infty < x < \infty$ en $\tau > 0$. Deze vergelijking is met gegegeven randvoorwaarden relatief eenvoudig op te lossen. Maar voor we dit gaan doen, zullen we eerst de Black-Scholes vergelijking omzetten naar de diffusievergelijking. De eerste stap is de variabelen schalen en dimensieloos maken zodat we het niet meer hebben over bepaalde termen in euro's of andere valuta, maar over algemene termen. Als we de prijs van het onderliggende aandeel schalen naar $S = Ee^x$, de prijs van de optie schalen naar $C = Ev(x,\tau)$ en de tijd dimensieloos maken door te stellen dat $t = T - \tau/\frac{1}{2}\sigma^2$ kunnen we de Black-Scholes vergelijking als volgt omzetten:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (r/\frac{1}{2}\sigma^2 - 1)\frac{\partial v}{\partial x} - r/\frac{1}{2}\sigma^2. \end{aligned}$$

Door in deze laatste vergelijking v te substitueren met $v = e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau)$ verkrijgen we na differentiatie de volgende uitdrukking:

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}u. \tag{3.6}$$

Door nu $\beta = \alpha^2 + (r/\frac{1}{2}\sigma^2 - 1)\alpha - r/\frac{1}{2}\sigma^2$ te stellen, wordt β geëlimineerd. En met het gegeven dat $0 = 2\alpha + (r/\frac{1}{2}\sigma^2 - 1)$ de term $\partial u/\partial x$ elimineert, krijgen we voor $\alpha = -\frac{1}{2}(r/\frac{1}{2}\sigma^2 - 1)$ en $\beta = -\frac{1}{4}(r/\frac{1}{2}\sigma^2 + 1)^2$ de term

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau), \tag{3.7}$$

waarbij

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Een oplossing voor de diffusiegelijking kan als volgt worden berekend. We verkrijgen een oplossing voor deze vergelijking die alleen afhankelijk is van x door de combinatie $\xi = x/\sqrt{\tau}$, waarbij we voor u de uitdrukking $u(x,\tau) = \tau^{-\frac{1}{2}}U(\xi)$ proberen. De term $\tau^{-\frac{1}{2}}$ gebruiken we om er zeker van te zijn dat $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,\tau)dx$ constant is voor elke τ. Door deze partieel te differentieren verkrijgen we

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}\tau^{-3/2}U(\xi) - \frac{1}{2}x\tau^{-2}U'(\xi),$$

en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\tau^{-1}U'(\xi)\right) = \tau^{-3/2}U''(\xi).$$

Als we deze uitdrukkingen invullen in de diffusievergelijking gebeurt het volgende:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned}
&\iff -\frac{1}{2}\tau^{-3/2}U(\xi) - \frac{1}{2}x\tau^{-2}U'(\xi) = \tau^{-3/2}U''(\xi) \\
&\iff -\frac{1}{2}U(\xi) - \frac{1}{2}x\tau^{-1/2}U'(\xi) = U''(\xi) \\
&\iff U''(\xi) + (\frac{1}{2}\xi U(\xi))' = 0.
\end{aligned}$$

We zien dus dat dit een standaard differentiaalvergelijking is waar we door tweemaal integreren de algemene oplossing

$$U(\xi) = Ce^{-\xi^2/4} + D,$$

voor de constanten C en D verkrijgen. Door D op 0 te stellen en de oplossing te normaliseren door te stellen dat $C = 1/(2\sqrt{\pi})$ zodat $\int_{-\infty}^{\infty} u\ dx = 1$, zien we dat de expliciete oplossing gelijk is aan

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-x^2/4\tau}. \tag{3.8}$$

Hoewel dit een mooie expliciete oplossing lijkt, zien we al wel dat voor $\tau = 0$ deze oplossing singulier is. Hoe dichter τ nadert naar 0, hoe extremer $u(x,\tau)$ wordt. Het blijkt dat $u(x,0) = \delta(x)$, waarbij $\delta(x)$ een Dirac deltafunctie is. De algemene definitie van een Dirac deltafunctie $\delta_\epsilon(t)$ heeft de eigenschappen dat voor elke ϵ de functie stuksgewijs continu is, de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t)\ dt$ gelijk is aan 1 en voor elke $t \neq 0$, $\lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(t) = 0$. Het is duidelijk dat δ_ϵ extreem slecht gedrag vertoont als $\epsilon \to 0$. Toch definiëren we $\delta(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(t)$. We zien dus dat (3.8) een Dirac deltafunctie is en kunnen dus zeggen dat $u(x,0) = \delta(0)$.
Merk op dat voor elke s in $u(s-x,\tau) = u(x-s,\tau)$ geldt dat

$$u(s-x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-(s-x)^2/4\tau}$$

een oplossing is voor de diffusievergelijking voor zowel s als x als statische onafhankelijke variabele, waarbij de initiële waarde voor $\tau = 0$ gelijk is aan $\delta(s-x)$. Nu, hoewel $\delta(x)$ extreem gedrag vertoont, kunnen we met het feit dat de integraal over $\delta(s-x)$ gelijk is aan 1 stellen dat

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s-x)u(s,0)ds = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(s-x)u(s,0)ds$$

en

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} u(s,0)e^{-(x-s)^2/4\tau}ds. \tag{3.9}$$

Omdat we weten dat $v(x,0) = \max(e^x - 1, 0)$ en $v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau)$ verkrijgen we $u(x,0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0)$. Nu is het slechts een kwestie van het oplossen van de integraal in (3.9).
Laten we voor het gemak invoeren dat $x^* = (s-x)\sqrt{2\tau}$. We kunnen $u(x,\tau)$

dan schrijven als

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x^*\sqrt{2\tau}+x,0)e^{-\frac{1}{2}x^{*2}}dx^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x^*\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}x^{*2}}dx^* \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x^*\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}x^{*2}}dx^* \\
&= I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

De oplossing voor I_1 wordt als volgt berekend:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x^*\sqrt{2\tau})-\frac{1}{2}x^{*2}}dx^* \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}e^{-\frac{1}{2}(x*-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2}dx^* \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x/\sqrt{2\tau}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho \\
&= e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}N(d_1),
\end{aligned}$$

met $d_1 = x/\sqrt{2\tau}+\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$ en

$$N(d_1) = 1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{d1} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds. \tag{3.10}$$

Oftewel, N is de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling. De berekening van I_2 gaat analoog aan die van I_1, behalve dat $(k+1)$ wordt vervangen door $(k-1)$.

Na deze reeks van berekeningen kunnen we dan eindelijk de prijs van een Europese calloptie vaststellen. Als we nu $x = \log(S/E)$, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$ en $C = Ev(x,\tau)$ invullen in (3.7) herleiden we de prijs van een optie $C(S,t)$:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

waarbij

$$d_1 = \frac{\log(S/E)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

$N(d_1)$ wordt gegeven in (3.10) en $N(d_2)$ wordt op analoge wijze berekend.

Hoofdstuk 4

Numerieke resultaten

In dit hoofdstuk gaan we de accuraatheid onderzoeken van de afgeleide formule voor de prijs van een Europese calloptie. We zullen dit doen door de berekende optieprijzen te vergelijken met reële optieprijzen. Hiervoor hebben we een maand lang de prijzen van aandelen en verschillende opties van de gevestigde onderneming ING onder de loep genomen. Deze organisatie heeft een gedegen historie opgebouwd en kan daarom prima dienen als onderzoeksobject. De te onderzoeken optieseries worden gegeven in tabel 4.1.

T	E
juni 2006	28,00
juni 2006	30,00
juni 2006	32,00
juli 2006	30,00
juli 2006	32,00
juli 2006	34,00

Tabel 4.1: De te onderzoeken optieseries van ING.

In tabel 4.2 tot en met tabel 4.7 worden de berekende en werkelijke optieprijzen met elkaar vergeleken voor de volgende beursdagen van 2006: 9 mei, 15 mei, 23 mei, 31 mei en 5 juni. In deze periode vinden er geen belangrijke fusies, overnamen, splitsingen van het aandeel of andere gebeurtenissen die de waarde van het aandeel drastisch doen veranderen.

We hanteren een rentestand van 1,75% per jaar zoals de gegeven rentestand van De Nederlandse Bank voor de depositorente d.d. 8 juni 2006. We berekenen de volatiliteit, oftewel σ, van het aandeel zoals uitgelegd door Sheldon Natenberg in het vierde hoofdstuk van [5]. Door data[1] van het afgelopen half jaar

[1]Een file met slotkoersen tot één jaar terug van het aandeel ING is te vinden op http://www.behr.nl/Beurs/Slotkoersen/slotkoersen.php?fd=ing.

te gebruiken verkrijgen we een volatiliteit voor het aandeel ING van 21%. En door de te overbruggen tijd $T - t$ uit te drukken in jaren verkrijgen voor de calloptie met vervaldatum 30 juni 2006 de waarden zoals vermeld in tabel 4.2. De werkelijke waarde[2] van een calloptie wordt aangeduid met $C_w(S,t)$ terwijl $C_b(S,t)$ de berekende waarde van een optie representeert. Het relatieve verschil $\Delta\%$ wordt dan als volgt berekend:

$$\Delta\% = \frac{C_b(S,t) - C_w(S,t)}{C_w(S,t)} * 100\%.$$

Met deze gegevens en uitdrukkingen is het tijd om vergelijkingen te gaan maken.

t	T	E	S	$C_b(S,t)$	$C_w(S,t)$	$\Delta\%$
9-5	30-6	28,00	33,38	5,46	5,50	-0,73
15-5	30-6	28,00	31,64	3,75	3,95	-5,18
23-5	30-6	28,00	31,00	3,11	3,15	-1,41
31-5	30-6	28,00	30,53	2,63	2,70	-2,72
5-6	30-6	28,00	29,99	2,10	2,20	-4,52

Tabel 4.2: Berekende optieprijzen versus werkelijke optieprijzen van het aandeel ING met vervaldatum 30 juni en met een uitvoeringsprijs van 28 euro.

In tabel 4.2 zien we dat voor opties die nog een looptijd hebben van ongeveer één maand tot ongeveer twee maanden, de prijzen zeer nauwkeurig kunnen worden berekend. Zelfs als de vervaldatum nadert. Hoewel de afgeleide formule gevoelig is voor volatiliteitsveranderingen, blijkt dat het berekenen van de volatiliteit over de afgelopen zes maanden een goede indicatie geeft. De kleine afwijkingen kunnen we met name toerekenen aan de hantering van deze volatiliteit want uit deze resultaten blijkt ook dat hoewel subjectieve handelskennis van de optiehandelaren altijd een rol speelt bij de totstandkoming van een optieprijs, deze hoegenaamd geen invloed uitoefent bij callopties met een uitvoeringsprijs relatief ver onder de de prijs van het onderliggende aandeel. Om te zien hoe lang het duurt tot de Black-Scholes vergelijking plaats moet maken voor subjectieve handelskennis, gaan we ook optieseries met uitvoeringsprijzen die dichter bij de aandeelprijs liggen onder de loep nemen.
In tabel 4.3 zien we dat zelfs bij een optieprijs die zeer dicht bij de prijs van het onderliggende aandeel in de buurt komt, en dus laag geprijsd is omdat het een minder aantrekkelijke calloptie is, er slechts een verschil van ongeveer tien procent bestaat tussen de werkelijke optieprijs en de berekende optieprijs.
Uit tabel 4.4 blijkt ook dat zelfs als de vervaldatum nadert, het vaststellen van een optieprijs met behulp van de Black-Scholes formule voor een nauwkeurige schatter zorgt. Met een maximale afwijking van dertien procent en overige verschillen van kleiner dan vier procent kunnen we ook voor de deze optieserie

[2] Werkelijke waarden van de optieprijzen van diverse optieseries ING zijn te vinden op http://www.aex.nl/scripts/marktinfo/OptieKoersen.asp?a=1&Symbool=ING.

t	T	E	S	$C_b(S,t)$	$C_w(S,t)$	$\Delta\%$
9-5	30-6	30,00	33,38	3,55	3,50	1,46
15-5	30-6	30,00	31,64	2,01	2,15	-6,50
23-5	30-6	30,00	31,00	1,46	1,50	-2,93
31-5	30-6	30,00	30,53	1,05	1,10	-4,68
5-6	30-6	30,00	29,99	0,67	0,60	11,71

Tabel 4.3: Berekende optieprijzen versus werkelijke optieprijzen van het aandeel ING met vervaldatum 30 juni en met een uitvoeringsprijs van 30 euro.

t	T	E	S	$C_b(S,t)$	$C_w(S,t)$	$\Delta\%$
9-5	30-6	32,00	33,38	1,92	1,70	13,05
15-5	30-6	32,00	31,64	0,81	0,80	0,92
23-5	30-6	32,00	31,00	0,46	0,45	2,51
31-5	30-6	32,00	30,53	0,24	0,25	-2,59
5-6	30-6	32,00	29,99	0,10	0,10	3,84

Tabel 4.4: Berekende optieprijzen versus werkelijke optieprijzen van het aandeel ING met vervaldatum 30 juni en met een uitvoeringsprijs van 32 euro.

stellen dat de optieprijs, op wat handelservaring na, objectief kan worden vastgesteld.

t	T	E	S	$C_b(S,t)$	$C_w(S,t)$	$\Delta\%$
9-5	31-7	30,00	33,38	3,71	3,70	0,36
15-5	31-7	30,00	31,64	2,26	2,45	-7,81
23-5	31-7	30,00	31,00	1,74	1,85	-5,74
31-5	31-7	30,00	30,53	1,37	1,55	-11,44
5-6	31-7	30,00	29,99	1,02	1,15	-11,45

Tabel 4.5: Berekende optieprijzen versus werkelijke optieprijzen van het aandeel ING met vervaldatum 31 juli en met een uitvoeringsprijs van 30 euro.

Vanaf tabel 4.5 bekijken we nog andere optieseries van ING. In plaats dat de vervaldatum is vastgesteld op 30 juni, is de datum wanneer deze series uitgevoerd moeten worden, vastgesteld op 31 juli. Tabel 4.5 laat zien dat dit niet erg van invloed is op het verschil tussen de werkelijke en berekende optieprijs als de prijs van het onderliggende aandeel lager is dan of gelijk is aan de uitvoeringsprijs. Het blijkt dus dat niet alleen als de vervaldatum nadert, maar ook als de vervaldatum nog ver in het verschiet ligt, de Black-Scholes formule een goede indicatie geeft.
Een iets groter relatief verschil tussen de berekende en werkelijke calloptieprijs

t	T	E	S	$C_b(S,t)$	$C_w(S,t)$	$\Delta\%$
9-5	31-7	32,00	33,38	2,19	2,05	6,95
15-5	31-7	32,00	31,64	1,10	1,20	-7,96
23-5	31-7	32,00	31,00	0,75	0,80	-5,88
31-5	31-7	32,00	30,53	0,52	0,60	-13,58
5-6	31-7	32,00	29,99	0,33	0,40	-17,46

Tabel 4.6: Berekende optieprijzen versus werkelijke optieprijzen van het aandeel ING met vervaldatum 31 juli en met een uitvoeringsprijs van 32 euro.

wordt gegeven door tabel 4.6. Hier zien we voor een geval dat wanneer de werkelijke uitvoeringsprijs de prijs van het onderliggende aandeel significant overtreft, er een iets grotere relatieve afwijking van de berekende optieprijs ten opzichte van de werkelijke optieprijs ontstaat. Aangezien deze afwijking onder de twintig procent blijft, is dit zeker niet te wijten aan onjuistheid van de Black-Scholes formule, maar eerder aan het hanteren van een andere volatiliteit of het bezitten van relevante marktkennis.

t	T	E	S	$C_b(S,t)$	$C_w(S,t)$	$\Delta\%$
9-5	31-7	34,00	33,38	1,11	0,90	23,79
15-5	31-7	34,00	31,64	0,45	0,45	-1,08
23-5	31-7	34,00	31,00	0,26	0,30	-13,96
31-5	31-7	34,00	30,53	0,15	0,15	-0,91
5-6	31-7	34,00	29,99	0,08	0,10	-21,95

Tabel 4.7: Berekende optieprijzen versus werkelijke optieprijzen van het aandeel ING met vervaldatum 31 juli en met een uitvoeringsprijs van 34 euro.

Dat een relatieve afwijking van rond de twintig procent niet veroorzaakt wordt door een significant verschil tussen de uitvoeringsprijs en de prijs van het onderliggende aandeel wordt wel duidelijk uit de cijfers die worden gegeven door tabel 4.7. Juist doordat in alle tabellen de verschillen niet eenduidig negatief of positief zijn, en het dus blijkt dat de Black-Scholes formule niet structureel onder- of overwaardeert, mogen de relatieve verschillen toegekend worden aan de volatiliteitswaardering en aan de subjectieve handelskennis die uiteraard bij elke optietransactie een rol speelt. We kunnen dus concluderen dat de evidentie die is ontstaan tijdens het nauwkeurig afleiden van de Black-Scholes formule, wordt bevestigd met de numerieke resultaten die in dit hoofdstuk worden gegeven. Daarom is de Black-Scholes formule een uitstekend middel om een correcte indicatie te verkrijgen voor het vaststellen van calloptieprijzen. Of een aanpassing van deze formule voor putopties ook zo goed presteert kunnen we uit onze resultaten niet afleiden, maar de nauwkeurige berekeningen die zijn gedaan door de heren Black en Scholes geven zeker een positief vermoeden.

Hoofdstuk 5

Conclusies en aanbevelingen

De impliciete formule gegeven door Black en Scholes in [2] blijkt door het schalen of dimensieloos maken van de parameters omgezet te kunnen worden in de bekende diffusievergelijking. Het blijkt dat deze diffussievergelijking expliciet kan worden opgelost in het geval van de Europese calloptie waarbij er gebruik gemaakt kan worden van de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling. Deze expliciete oplossing is niet alleen gedegen wiskundig onderbouwd, maar blijkt in werkelijkheid ook te dienen als een goede indicator voor de optieprijs. Door het vergelijken van werkelijke optieprijzen met berekende optieprijzen van de onderneming ING hebben we gezien dat de Black-Scholes formule ook in de praktijk gebruikt kan worden. We kunnen daarom voor het geval van Europese callopties concluderen dat de desbetreffende formule zowel theoretisch als praktisch enorm waardevol is.

Hoewel we slechts alleen gekeken hebben naar Europese callopties is de aanbeveling waardig om dit onderzoek verder uit te breiden naar onder andere Europese putopties. Wiskundig gezien kunnen de resultaten analoog aan de vorige hoofdstukken worden verkregen. Daarnaast is het interessant om te onderzoeken wat de invloed van dividenduitkering op zowel de korte als lange termijn is. Ook kan er gekeken worden hoe variabele rentestanden in het eerder beschreven model geïmplementeerd kunnen worden. En als deze resultaten voor Europese opties verkregen zijn, is het zeker de moeite waard om deze te gebruiken om zulkgelijke uitdrukkingen te verkrijgen voor Amerikaanse opties. Bij deze onderzoeken mag de vergelijking tussen berekende optieprijzen en werkelijke optieprijzen uiteraard niet ontbreken.

Bijlage A

Bewijs diffusievergelijking

Te bewijzen

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \\
\iff \quad & \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv
\end{aligned} \tag{A.1}
$$

Met $S = Ee^x$, $t = T - \tau/\frac{1}{2}\sigma^2$ en $C = Ev(x,\tau)$.

Bewijs Laten we eerst de term $\partial C/\partial t$ onder de loep nemen. We kunnen dan schrijven

$$
\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial Ev}{\partial t} = E\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}.
$$

Omdat we weten $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$, geldt dus $\partial\tau/\partial t = -\frac{1}{2}\sigma^2$. Hieruit volgt:

$$
\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 E\frac{\partial v}{\partial \tau}. \tag{A.2}
$$

Op dezelfde manier kunnen $\partial C/\partial S$ herschrijven. We maken hierbij gebruik van het gegeven feit dat $x = \ln(\frac{S}{E}) = \ln(S) - \ln(E)$, en dus geldt dat $\partial x/\partial S = \frac{1}{S}$:

$$
\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial Ev}{\partial S} = E\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{E}{S}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{A.3}
$$

Met deze eerste afgeleide kunnen we makkelijk de tweede afgeleide berekenen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{E}{S}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = E\frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial v}{\partial S}\frac{1}{S} + \frac{E}{S}\frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= -\frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S}\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} \\
&= -\frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{1}{S}.
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

Door (A.2), (A.3) en (A.4) te substitueren in (A.1) bewijzen we het gestelde als volgt:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 (Ee^x)^2 \left(-\frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + r(Ee^x)\frac{E}{S}\frac{\partial v}{\partial x} - rEv = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{\partial v}{\partial \tau} - Ee^{2x} \left(-\frac{1}{Ee^{2x}}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{Ee^{2x}}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - r/\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial v}{\partial x} + rv/\frac{1}{2}\sigma^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\frac{\partial v}{\partial x} - kv \\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv,
\end{aligned}
$$

waarbij $k = r/\frac{1}{2}\sigma^2$. Hierbij is het gestelde bewezen.

Bibliografie

[1] Dimitris Bertsimas and Ioana Popescu. On the relation between option and stock prices: A convex optimization approach. *Operations Research*, 50(2):358–374, 2002.

[2] F. Black and M.S. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, (3):637–654, 1973.

[3] Shu-Heng Chen, Chia-Hsuan Yeh, and Woh-Chiang Lee. Option pricing with genetic programming. In John R. Koza et al., editor, *Genetic Programming 1998: Proceedings of the Third Annual Conference*, pages 32–37, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, USA, 22-25 July 1998.

[4] K. Ito. On stochastic differential equations. *Memoirs, American Mathematical Society*, (4):1–51, 1951.

[5] Sheldon Natenberg. *Option Volatility and Pricing.* McGraw Hil, 1994.

[6] C. van Hulle and L. Vanthielen. Belfox: een empirische analyse van de opstartfase. *Tijdschrift voor economie en management*, 38(4):425–449, 1993.

[7] P. Wilmott, J. Dewynne, and J. Howison. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation.* Oxford Financial Press, Oxford, 1993.