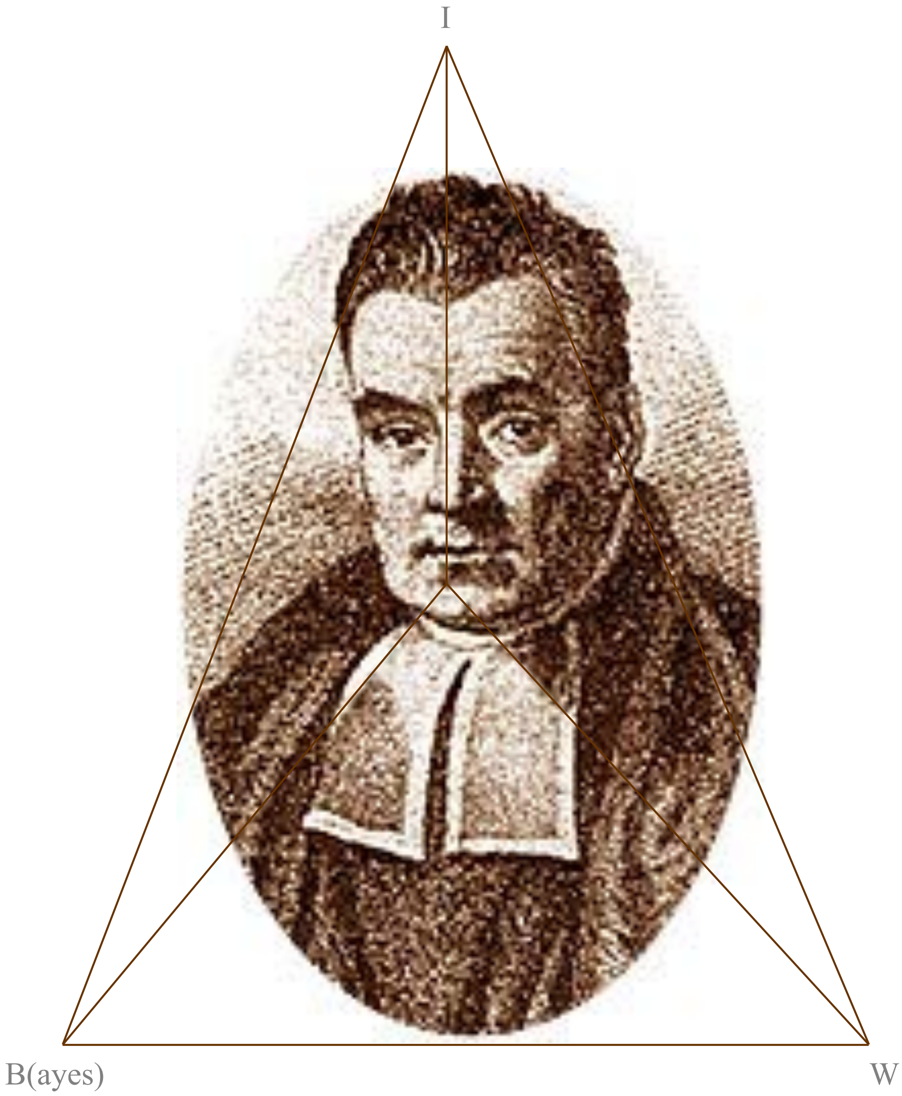
Bayesiaanse beslissingstheorie: hoe, wat en wanneer?



Inge Thiescheffer,
Studente
Bedrijfswiskunde en
informatica aan de VU
12 juli 2004

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding en overzicht

In dit hoofdstuk wordt zowel een korte inleiding op het onderwerp gegeven, als een overzicht van het werkstuk.

1.1 Inleiding

De Bayesiaanse beslissingstheorie is een kwantitatieve theorie die beslissingen kan ondersteunen. Deze kwantitatieve theorie is vooral interessant bij problemen waarbij er geen volledige informatie beschikbaar is. Hierdoor speelt onzekerheid een belangrijke rol. Met de Bayesiaanse methoden worden kansen gebruikt om onzekerheden te kwantificeren. Veel wiskundigen beschouwen dit als een beperking van de Bayesiaanse beslissingstheorie, omdat deze kansen subjectief kunnen zijn. De aanhangers van de Bayesiaanse beslissingstheorie beweren echter dat het gebruik maken van ingewonnen (eventueel subjectieve) informatie zorgt voor een grotere kans dat de goede beslissing geïdentificeerd wordt. De goede beslissing is hierbij de beslissing waarvan verwacht wordt dat deze als beste de doelen van een klant bevredigt.
Om te voorkomen dat er verkeerde ingewonnen informatie gebruikt wordt of dat er verkeerde kansverdelingen geformuleerd worden, is het van belang dat de Bayesiaanse analyse zorgvuldig en voorzichtig uitgevoerd wordt. Na deze Bayesiaanse analyse kan een robuustheid-onderzoek uitwijzen of de beslissing erg danwel weinig onderhevig is aan de juistheid van gemaakte aannames.

De probleemstelling waarop in dit werkstuk een antwoord zal worden gezocht is:

Hoe, wat en wanneer kan de Bayesiaanse beslissingstheorie een toegevoegde waarde leveren tijdens het maken van beslissingen?

Aan de hand van een literatuurstudie en een interview met de heer Huitink van Significant[1] zal in de rest van dit werkstuk een antwoord op deze probleemstelling worden gezocht.

1.2 Overzicht

Na de korte inleiding in paragraaf 1.1 over de Bayesiaanse beslissingstheorie, zal er in hoofdstuk 2 vier cases beschreven worden. Deze cases zijn gegeven door Significant en zijn voorbeeld problemen van bedrijven waarvoor er met behulp van kwantitatieve methoden antwoorden gevonden worden. In hoofdstuk 3 zal er uitgelegd worden hoe de Bayesiaanse beslissingstheorie werkt. Hierbij worden er cases van hoofdstuk 2 gebruikt om sommige methoden toe te lichten. In hoofdstuk 4 zal er tot slot toegelicht worden wanneer en waarom de Bayesiaanse beslissingstheorie een toegevoegde waarde kan hebben.

[1] Significant is een adviesorganisatie op het gebied van inkoop en ketenmanagement, facility management en kwantitatieve beleidsondersteuning

Hoofdstuk 2

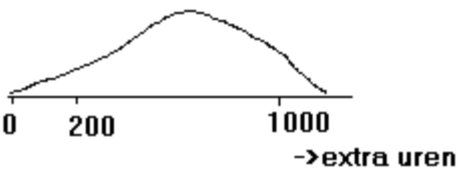
Cases met betrekking tot strategische besluitvorming

In onderstaande 4 paragraven zullen vier cases beschreven worden, namelijk:
- Inkoop:
  Indien van tevoren bekend is dat leverancier A een x aantal uren meer werk moet verrichten, wanneer kies je dan voor leverancier B (bij leverancier B is het aantal uren meerwerk onzeker/ onbekend)?
- Commercieel beleid van een industriële organisatie:
  Welke fabrieken moeten openblijven?
- Bedrijfsverzekering:
  Wat is een optimaal verzekeringscontract voor een bedrijf met betrekking tot ziektekosten?
- Belasting
  Wanneer kies je voor een meting in plaats van voor een lumpsum?

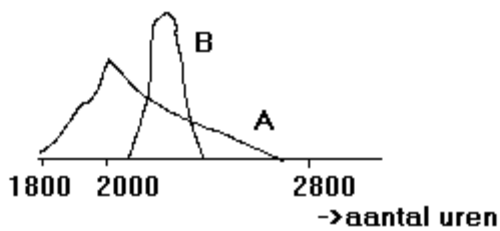
Deze cases zijn voorbeeld problemen van bedrijven waarvoor met behulp van kwantitatieve methoden antwoorden gevonden worden. Met behulp van de cases 2.2 en 2.5 worden in hoofdstuk 3 sommige methodes toegelicht.

2.1 Inkoop

Indien van tevoren bekend is dat bij een nieuw project leverancier A en leverancier B een aantal uren meer werk moet verrichten, wanneer kies je dan voor leverancier B?
Bij een keuze van een leverancier wordt er van tevoren een criterialijst opgesteld voor een selectie van leveranciers. Vervolgens komen deze geselecteerde leveranciers met een aanbieding. Bij deze aanbieding heeft men te maken met onzekerheid, en worden bijvoorbeeld projectkosten over de ontwikkeling van apparatuur onder voorbehoud gegeven. De meeste variatie zit vaak in de kosten. Daarom is het van belang om de gevoeligheid van wisselende specificaties te modelleren door o.a. te achterhalen wat de aanvullende meer/ minder werk tarieven zijn en door de verdeling van de extra uren te bepalen. Dit onderzoek zal daardoor onder andere een onderzoek naar de verdeling van extra uren vereisen. Omdat het over een nieuw project gaat, is de verdeling van de extra uren niet expliciet te bepalen. Er zullen echter wel meningen en/ of verwachtingen zijn naar aanleiding van voorgaande projecten. De Bayesianen zijn er van overtuigd dat het gebruik maken van deze meningen en/of verwachtingen de kans zal vergroten dat de goede leverancier gekozen wordt.



Figuur 2.1: Van een willekeurig bedrijf aangegeven hoe de verdeling is van het aantal extra uren.



Figuur 2.2: Van leverancier A en leverancier B aangegeven hoe de verdeling is van het aantal uren.

2.2 Commercieel beleid van een industriële organisatie

Welke fabrieken moeten openblijven? Het antwoord op deze vraag kan pas gegeven worden na onderzoek van de prijsstelling en de afzet.
De afzet is afhankelijk van:
- politiek en regelgeving
- de invloed van concurrenten die afhankelijk is van
    - ◊ de kwaliteit
    - ◊ beperkingen
    - ◊ markt
    - ◊ kosten

Onzekerheid omtrent regelgeving beperkt zicht tot onzekerheid over wanneer de nieuwe regelgeving ingevoerd wordt. Door bij de politiek en regelgeving uit te gaan van een ceteris parabus (onder gelijke omstandigheden van overige zaken), kan er gekeken worden naar de invloed van concurrenten bij verschillende scenario's:

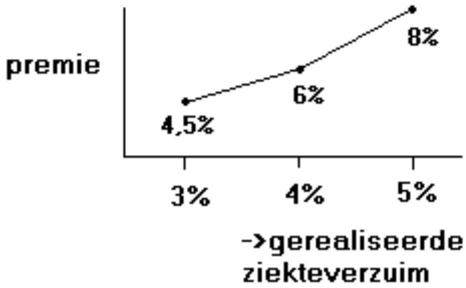
	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3
Concurrent 1	0	200	100
Concurrent 2	200	200	0
Concurrent 3	200	300	100

Tabel 2.4: Per concurrent de verwachte afzet indien scenario uitgevoerd wordt.

Met bovenstaande tabel kan er een analyse gemaakt worden wat het te behalen marktaandeel kan worden. De tabel had ook in prijzen uitgedrukt kunnen worden indien er vanuit gegaan wordt dat de markt constant is. Tevens zal er geanalyseerd moeten worden welk scenario het meest waarschijnlijk is. Hierbij krijg je dus ook te maken met onzekerheid omtrent het te behalen marktaandeel. Omdat de te behalen marktaandeel afhangt van een situatie die hoogstwaarschijnlijk nog niet eerder is voorgekomen, zal er geen verdeling omtrent de te behalen marktaandeel beschikbaar zijn. Met informatie die via vergelijkbare situaties verkregen kan worden, kan er wel wat gezegd worden over de onzekerheid van de te behalen marktaandeel. Deze informatie wordt echter alleen bij de Bayesiaanse beslissingstheorie gebruikt. Volgens de Bayesianen zal er door gebruik te maken van deze informatie een realistischer antwoord gegeven kunnen worden op de vraag: Welke fabrieken moeten openblijven?

2.3 Bedrijfsverzekering

Wat is een optimaal verzekeringscontract voor een bedrijf met betrekking tot ziektekosten? Om de ziektekosten te dekken, stelt een verzekeringsbedrijf een zekere premie vast. Indien er hoge schades zijn dan ook een hogere premie. Dit is afhankelijk van de bedrijfsactiviteiten. Het bedrijf gaat uit van een ziekteverzuimpercentage. Met een verzekeringsbedrijf maakt het bedrijf een afspraak over het te verwachten ziekteverzuimpercentage. Indien het bedrijf zijn verwachte ziekteverzuim overschrijdt, dan wordt de premie aangepast. Hierbij is de nieuwe premie hoger dan men verhoudingsgewijs zou verwachten. Indien bijvoorbeeld het verwachte ziekteverzuimpercentage 4% is, en het gerealiseerde ziekteverzuimpercentage 5%, dan is de premie 8% in plaats van 6%. Echter als het gerealiseerde ziekteverzuim lager is dan de verwachting, dan zal de premie zich wel verhoudingsgewijs aanpassen. Dit systeem verloopt volgens het bonus malus systeem.

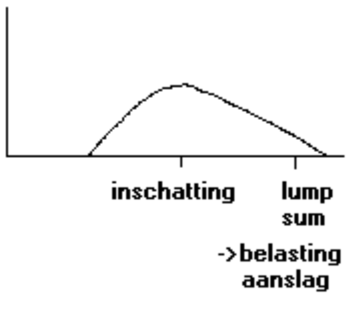


Figuur 2.3: De premie ten opzichte van het gerealiseerd ziekteverzuim bij een verwachte ziekteverzuim van 4%.

Er zijn dus extra kosten omdat er initieel een verkeerde schatting was, waardoor het van extra van belang is dat de schatting goed is. Bij de Bayesiaanse beslissingstheorie gebruikt men subjectieve informatie[2] om de onzekerheid van het ziekteverzuimpercentage te bepalen omdat de omstandigheden elk jaar anders zijn. Met behulp van deze subjectieve informatie wordt er door de Bayesianen verwacht dat er een betere schatting gemaakt wordt. Daarnaast wordt er bij de Bayesiaanse beslissingstheorie rekening gehouden met de consequenties (zoals de extra kosten) van bepaalde beslissingen. Om deze redenen wordt er door de Bayesianen verwacht dat er met behulp van de Bayesiaanse beslissingstheorie er een beter antwoord gegeven kan worden op de vraag: Wat is een optimaal verzekeringscontract voor een bedrijf met betrekking tot ziektekosten?

2.4 Belasting

Wanneer kies je voor een meting in plaats van voor een lumpsum?
Elk bedrijf kan kiezen of ze een standaard bedrag (de lumpsum) betalen als belasting, of dat ze de omvang van de belastingaanslag laten meten. Omdat er echter van tevoren weinig informatie bekend is over het bedrag welke via de meting bepaald wordt, maar het bedrijf wel een idee heeft over dit bedrag, kan men via een steekproef een inschatting maken van de grootte van het bedrag. Bij het maken van deze schatting, krijgt men te maken met onzekerheid.



Figuur 2.4: De verdeling van de grootte van de belastingaanslag.

Net als bij het ziekteverzuimpercentage zal men bij de Bayesiaanse beslissingstheorie de onzekerheid subjectief bepalen omdat de omstandigheden elk jaar anders zijn. Omdat er bij

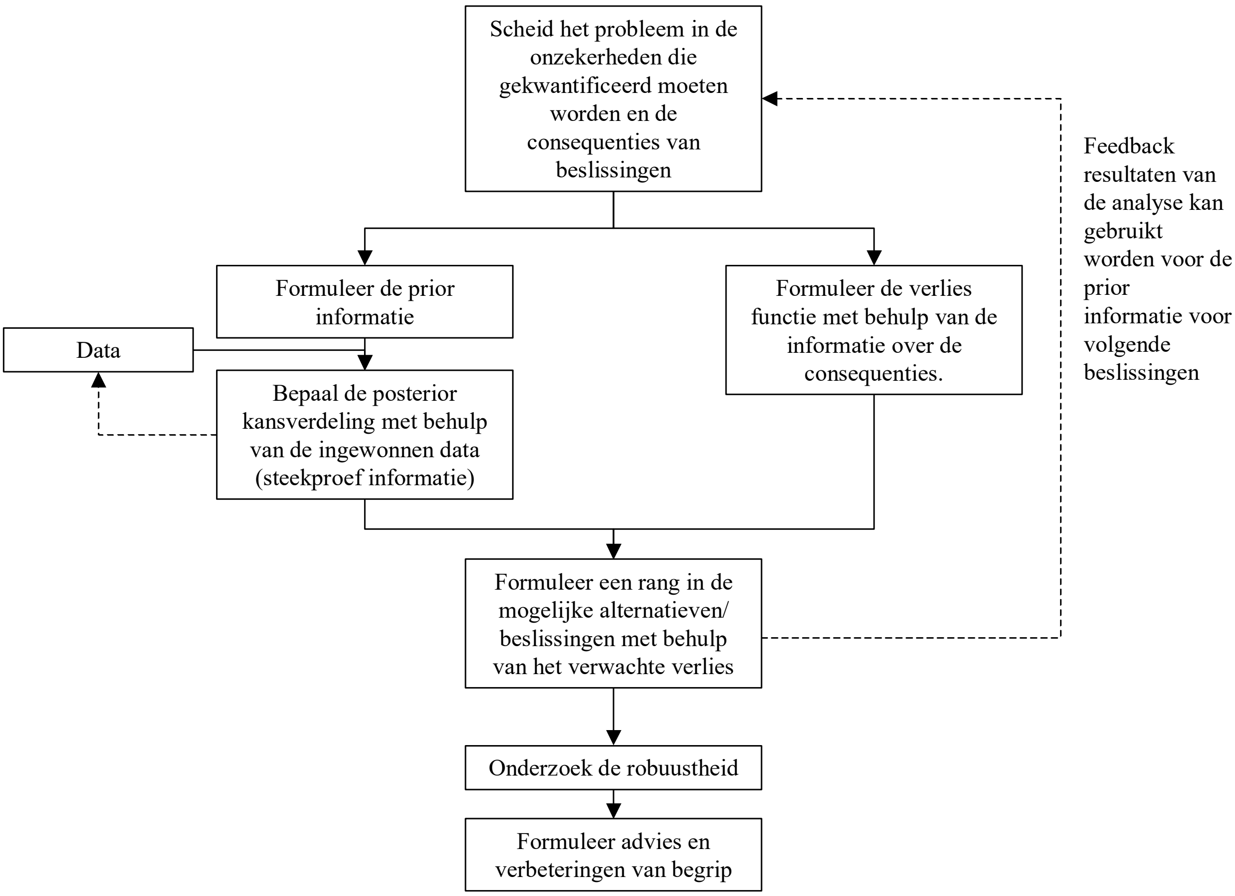
[2] Informatie uit voorgaande jaren kan hoogstwaarschijnlijk in deze case niet gebruikt worden doordat de omstandigheden zoals aantal personeelsleden, werksfeer, etc. elk jaar verandert. Als de informatie uit voorgaande jaren niet gebruikt kan worden, dan kan men de onzekerheid over het ziekteverzuim niet frequentistisch bepalen. Als de onzekerheid frequentistisch bepaald wordt dan zal er namelijk gekeken worden hoe vaak het voorkwam dat het ziekteverzuimpercentage bijvoorbeeld 3% is. Als de onzekerheid niet frequentistisch bepaald kan worden, dan wordt er door de Bayesianen uitgeweken naar het subjectief bepalen.

andere kwantitatieve methoden geen subjectieve informatie gebruikt wordt en de Bayesianen er van overtuigd zijn dat deze subjectieve informatie een toegevoegde waarde levert, verwachten de Bayesianen dat met behulp van de Bayesiaanse beslissingstheorie er een beter antwoord gegeven kan worden op de vraag: Wanneer kies je voor een meting in plaats van voor een lumpsum?

Hoofdstuk 3

Bayesiaanse beslissingstheorie

In figuur 3.1 is een overzicht van de stappen van de Bayesiaans beslissingstheorie weergegeven.



Figuur 3.1: Overzicht stappen Bayesiaanse beslissingstheorie.

Uit bovenstaande figuur blijkt dat de Bayesiaanse beslissingstheorie gebruik maakt van:
- prior informatie
- verlies informatie
- steekproef informatie

In dit werkstuk worden de methodes bekeken van de Bayesiaanse beslissingstheorie indien er voldoende prior steekproef informatie beschikbaar is. Er zijn ook problemen waarbij er vage of geen prior informatie beschikbaar is. Dit wordt dan ondervangen door gebruik te maken van niet-informatieve priors. Tevens zijn er problemen waar geen steekproef informatie beschikbaar is (no-data problems). Hoe deze no-data problems geanalyseerd worden of hoe er gebruik gemaakt wordt van niet-informatieve priors, is beschreven in "Statistical decision theory".

In paragraaf 3.1 wordt uitgelegd wat prior informatie, steekproef informatie en verlies informatie is. Tevens zal toegelicht worden hoe deze informatie om te buigen is naar bruikbare formules. De formules van de prior en steekproef informatie worden uitgedrukt in kansverdelingen. Deze kansverdeling horen in staat te zijn ook eventuele uitbijters te modelleren. Dit kan middels het gebruik maken van een verdeling uit "de lange-staarten verdelingsfamilie"[3] of middels gemixte modellen[4].

Met behulp van deze informatie kan een Bayesiaanse analyse uitgevoerd worden. Er zijn verschillende manieren waarop er een Bayesiaanse analyse uitgevoerd wordt. Drie manieren worden in paragraaf 3.2 beschreven. De laatste manier, de Bayesiaanse analyse die gebruikt maakt van beslissingsbomen, wordt met behulp van case 2.1 toegelicht.

Het resultaat van deze analyse is een Bayes regel die aangeeft wanneer welke beslissing het beste is. Een robuustheid onderzoek, zoals beschreven in paragraaf 3.3, kan aangeven of een Bayes regel weinig of zeer gevoelig is voor misspecificatie van de informatie.

Vanwege de moeilijkheden gedurende het formuleren van de informatie, gedurende de Bayesiaanse analyse en gedurende de robuustheid onderzoek, is de Bayesiaanse beslissingstheorie beperkt toepasbaar. De problemen waarbij het aangeraden wordt om een Bayesiaanse analyse uit te voeren zijn beschreven in hoofdstuk 4. Tevens wordt in hoofdstuk 4 toegelicht waarom er door de Bayesianen verwacht wordt dat de Bayesiaanse beslissingstheorie betere resultaten levert dan andere kwantitatieve methoden.

3.1 Informatie

3.1.1. Prior informatie

Prior informatie is informatie over θ die via andere bronnen dan statistisch onderzoek boven water komt. Hierbij is de θ gelijk aan de onbekende numerieke grootheden. Een voorbeeld van een bron voor het formuleren van prior informatie is ervaringen die opgedaan zijn bij vergelijkbare situaties met dezelfde θ. Indien deze informatie via interviews verkregen wordt, dan is deze informatie erg afhankelijk van de manier waarop de vragen geformuleerd zijn. Bij het verkrijgen van informatie via interviews of vergelijkbare onderzoeken, zal er zorgvuldig om gegaan moeten worden met deze informatie om verkeerde aannames te voorkomen. Doordat de θ het beslissingsproces beïnvloedt, is het van belang om te weten welke waarden θ kan aannemen. Deze uitkomstenruimte wordt met het symbool Θ weergegeven.

Voorbeeld voor θ:
De grootte van de belastingaanslag

Voorbeeld voor prior informatie π(θ):
De verdeling van de grootte van de belastingaanslag

Voorbeeld voor Θ:
De verzameling van waarden die de grootte van de belastingaanslag kan aannemen
(case 2.4)

[3] Voorbeelden van verdelingen uit "de lange-staarten verdelingsfamilie" zijn o.a. t-verdeling, negatief-binomiale verdeling, beta-binomiale verdeling

[4] een gemixt model is een model die over het algemeen een standaard verdeling gebruikt voor het grootste gedeelte van de waarden en het toestaat dat er een andere kansverdeling (met een ander centrum en een grotere spreiding) wordt gebruikt voor andere parameter waarden.

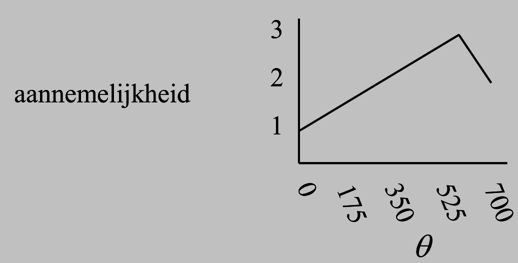
De manier waarop er over prior informatie gesproken wordt is in termen van een kansverdeling $\pi(\theta)$. $\pi(\theta)$ zal gebruikt worden om een prior verdeling van de θ weer te geven. De prior verdeling $\pi(\theta)$ kan verkregen worden via een subjectieve of een frequentieve bepaling. Bij de frequentieve bepaling wordt er gekeken hoe vaak een gebeurtenis relatief voorkomt. Indien bij case 2.4 de frequentieve bepaling gebruikt wordt, zal er bijvoorbeeld gekeken worden hoe vaak de θ, de onbekende waarde van de belastingaanslag, bij vergelijkbare situaties een waarde heeft tussen de 300 en de 400. De subjectieve bepaling is ontwikkeld omdat bij sommige cases de frequentieve bepaling niet gebruikt kan worden. De frequentieve bepaling kan bijvoorbeeld niet gebruikt als de belastingaanslag elk jaar verschilt omdat er elk jaar andere omstandigheden zijn. De grootte van de belastingaanslag kan dan beschouwd worden als een uniek "one-time event". Het idee bij subjectieve bepaling is dat de kans op een bepaalde gebeurtenis het persoonlijk geloof in de kans op de gebeurtenis weergeeft.

Manieren van subjectieve bepaling
Als de uitkomstenruimte Θ discreet is, dan zal de subjectieve kans per element van Θ bepaald moeten worden. Als Θ continu verdeeld is, dan kan de prior verdeling $\pi(\theta)$ op 1 van de volgende manieren bepaald worden:

a. De histogram benadering
   Deze benadering wordt gebruikt als de uitkomstenruimte voor θ, Θ, een reëel interval is. Bij deze methode wordt de uitkomstenruimte Θ in intervallen verdeeld, om vervolgens de subjectieve kansen van elk interval te bepalen. Met deze kansen kan er een kansenhistogram getekend worden. Via de kansenhistogram kan er een prior verdeling $\pi(\theta)$ bepaald worden.

b. De relatieve aannemelijkheid benadering
   Deze benadering wordt gebruikt als de uitkomstenruimte voor θ, Θ, een subset is van een reëel interval. Bij deze methode wordt de intuïtieve aannemelijkheid van verschillende punten in de parameter ruimte Θ vergeleken. Met de resultaten van deze vergelijking kan er een prior verdelingsfunctie bepaald worden.

Voorbeeld relatieve aannemelijkheid benadering:
Stel voor: $\theta=525$ is het meest aannemelijk. Daarnaast wordt er verwacht dat $\theta=0$ het minst aannemelijk is. Voor een goede schets wordt er dan verwacht dat het voldoende is om de aannemelijkheid van de punten 175, 350. en 700 te bepalen. Er is besloten dat $\theta= 350$ en $\theta=700$ twee keer zo aannemelijk zijn dan $\theta=0$, terwijl $\theta=175$ anderhalf keer zo aannemelijk is dan $\theta=0$. Dit kan als volgt worden weergegeven:



Omdat bovenstaande geschetste functie niet integreert naar 1, zal een constante c bepaald moeten worden, die ervoor zorgt dat "c x bovenstaande functie" = $\pi(\theta)$ naar 1 integreert

(case 2.4)

c. Een gegeven functionele vorm matchen

Deze benadering wordt gebruikt als er een standaard verdelingsfunctie gevonden kan worden die bij benadering overeenkomt met (a) en (b). Deze benadering wordt ook gebruikt als er alleen vage prior informatie beschikbaar is. De methode bestaat uit de volgende stappen:

- neem aan dat $\pi(\theta)$ van een gegeven functionele vorm is
- bepaal de parameters van deze gegeven vorm zodat de prior verwachtingen het meest benadert.

d. De bepaling van de cumulatieve verdelingsfunctie
Bij deze methode wordt de prior bepaald door op een subjectieve manier een cumulatieve verdelingsfunctie te bepalen. Dit kan door verschillende α-fracties subjectief te bepalen ($=z(\alpha)$), om vervolgens een gladde curve te tekenen middels de punten $(z(\alpha), \alpha)$

3.1.2. Steekproef informatie

Steekproef informatie wordt verkregen door een statistisch onderzoek te verrichten zodat er informatie over θ boven water komt. Het resultaat van dit statistisch onderzoek wordt aangegeven als X (een random variabele). X zal vaak een vector zijn, waarbij X_i onafhankelijke waarnemingen van dezelfde verdeling zijn. De kansverdeling van X zal afhankelijk zijn van de onbekende waarde van θ. Aangenomen wordt dat X een continu of discreet random variabele is, met dichtheid $f(x|\theta)$.

Voorbeeld voor steekproef informatie: *Bij geen enkele case is een verdeling vermeld. Bij case 2.4 zou men na statistisch onderzoek middels een steekproef kunnen veronderstellen dat X~N(θ,40)* *(case 2.4)*

Posterior verdeling
In figuur 3.1 is te zien dat met behulp van deze data en met behulp van de prior informatie er een posterior verdeling bepaald kan worden. De posterior verdeling geeft de kans op θ weer gegeven x, oftewel de kans $f(\theta|x)$. Deze posterior verdeling kan met behulp van de Bayes theorie bepaald worden.

Algemeen Bayes Theorie
De kans op gebeurtenis A gegeven gebeurtenis B is

$$= P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(B)P(B|A)}{P(B)} \qquad (3.1)$$

Hierdoor kan de posterior verdeling als volgt bepaald worden:

$$f(\theta,x) = \pi(\theta) f(x \mid \theta)$$

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta,x)}{f(x)} = \frac{f(\theta,x)}{\int_{\Theta} f(\theta,x)d\theta} = \frac{\pi(\theta) f(x \mid \theta)}{\int_{\Theta} f(\theta,x)d\theta} \qquad (3.2)$$

$$f(\theta|x) \propto f(\theta,x) = \pi(\theta) f(x \mid \theta)$$

Hierdoor kan er geconcludeerd worden dat de posterior verdeling afhankelijk is van de vermenigvuldiging van de prior verdeling $\pi(\theta)$ met de dichtheid $f(x|\ \theta)$ die via de steekproef verkregen is.

3.1.3. Verlies informatie

Voorbeeld voor a:
De aanname wat de grootte van de belastingaanslag zal zijn. Dit beïnvloedt de keuze of er gekozen wordt voor een meting of voor een lumpsum

(case 2.4)

De verlies informatie geeft kwantitatieve informatie over de mogelijke consequenties voor elke mogelijke beslissing en voor elke mogelijke waarde van θ. Hierbij specificeert de verliesfunctie L(θ,a) hoeveel een klant of bedrijf verliest als hij voor alternatief a kiest en θ de werkelijke waarde is. Tijdens het opstellen van de verliesfunctie L(θ,a) stuit men op de volgende problemen:

- de waarden van de consequenties zijn soms moeilijk op een meetbare schaal weer te geven
- indien er meerdere parameters (winst, kans op faillissement, ...) invloed hebben op de waarde van de consequentie, dan zal de verliesfunctie L(θ,a) uitgedrukt wordt in utiliteiten. Een utiliteit geeft de werkelijke waarde van een beloning weer. De utiliteit zal wel bepaald moeten worden voor elke mogelijke consequentie van de verschillende alternatieven.

De verlies functie kan op twee manieren bepaald worden:

- via het bepalen van de utiliteiten
- via het gebruik van standaard verlies functies

Via het bepalen van de utiliteiten
De methode om utiliteiten te bepalen is een ingewikkelde methode. De methode wordt beschreven in "Statistical Decision Theory" en zal hier vanwege de complexiteit niet toegelicht worden.

Via het gebruik van standaard verliesfuncties
Vaak worden beslissingsregels geanalyseerd met zekere standaard verliesfuncties. Afhankelijk van het probleem kan een van deze standaard verliesfuncties of een afgeleide vorm hiervan toegepast worden. De standaard verliesfuncties zijn:

A) de kwadratische fouten verlies:
   a. normaal: $L(\theta,a)= (\theta-a)^2$
   b. gewogen: $L(\theta,a)= w(\theta)(\theta-a)^2$
      geeft weer dat een gegeven fout tijdens het maken van een schatting vaak varieert in hoeveel schade dit oplevert met betrekking tot wat θ is.
   c. kwadratisch: $L(\theta,a)= (\theta-a)^t Q (\theta-a)$

B) lineaire loss: $L(\theta,a) = \begin{cases} K_0(\theta-a) & \text{als } (\theta-a) \geq 0 \\ K_1(\theta-a) & \text{als } (\theta-a) < 0 \end{cases}$

   K_0 en K_1 zijn constanten die de invloed reflecteren van een te hoge dan wel te lage schatting. Als K_0 en K_1 functies zijn van θ dan wordt er gesproken van gewogen lineaire loss.

C) "0-1" loss:

a. normaal: $L(\theta, a) = \begin{cases} 0 & \text{als } \theta \in \Theta_i \\ 1 & \text{als } \theta \in \Theta_j \end{cases}$ $, \Theta_i$ en Θ_j zijn subsets van $\Theta, i \neq j$,

b. realistischer: $L(\theta, a) = \begin{cases} 0 & \text{als } \theta \in \Theta_i \\ K_j & \text{als } \theta \in \Theta_j \end{cases}, i \neq j$

c. gewogen: $L(\theta, a) = \begin{cases} 0 & \text{als } \theta \in \Theta_i \\ K_j(\theta) & \text{als } \theta \in \Theta_j \end{cases}, i \neq j$

Voorbeeld voor L:

Als het lumpsum bedrag gelijk is aan bijvoorbeeld 500 euro, dan zal er indien er aangenomen wordt dat de grootte van de belastingaanslag groter is dan 500 (=a>500) gekozen worden voor een lumpsum. Blijkt de werkelijke grootte van de belastingaanslag overeenkomstig met de aanname groter te zijn dan 500, dan is de goede beslissing genomen en zal het verlies gelijk zijn aan nul. Blijkt de werkelijke grootte van de belastingaanslag niet overeenkomstig te zijn aan de aanname, oftewel blijkt de werkelijke grootte kleiner te zijn dan 500, dan zal er verlies zijn omdat het dan beter was geweest om voor een meting te kiezen. Het verlies zal dan gelijk zijn aan het lumpsumbedrag min de werkelijke grootte van de belastingaanslag.

Indien er aangenomen wordt dat de grootte van de belastingaanslag kleiner is dan 500(=a<500), dan zal er gekozen worden voor een meting. Blijkt de werkelijke grootte van de belastingaanslag overeenkomstig met de aanname kleiner te zijn dan 500, dan is de goede beslissing genomen en zal het verlies gelijk zijn aan nul. Blijkt de werkelijke grootte van de belastingaanslag niet overeenkomstig te zijn aan de aanname, oftewel blijkt de werkelijke grootte groter te zijn dan 500, dan zal er verlies zijn omdat het dan beter was geweest om voor een lumpsum te kiezen. Het verlies zal dan gelijk zijn aan de werkelijke grootte van de belastingaanslag min het lumpsumbedrag.

In formulevorm kan bovenstaande als volgt weergegeven worden:

$$L(\theta, a) = \begin{cases} 0 & \text{als } \theta \geq 500 \text{ en } a \geq 500 \\ 500 - \theta & \text{als } \theta < 500 \text{ en } a \geq 500 \\ 0 & \text{als } \theta < 500 \text{ en } a < 500 \\ \theta - 500 & \text{als } \theta \geq 500 \text{ en } a < 500 \end{cases}$$

Deze formulering van de verlies informatie lijkt op het gewogen “0-1”-loss.

(case 2.4)

3.2 Bayesiaanse analyse

Gedurende de Bayesiaanse analyse worden de drie verschillende informatiebronnen gecombineerd om zodoende aan te geven wanneer welke beslissing het beste is. Hierdoor kan er een rang in de mogelijke alternatieven/ beslissingen geformuleerd worden.

Er zijn verschillende vormen van een Bayesiaanse analyse. De vormen die in de onderstaande subparagrafen toegelicht worden zijn de:
1. Normale vorm
2. Extensieve vorm
3. Beslissingsboom

Deze vormen worden in de onderstaande subparagrafen toegelicht.

3.2.1. Normale vorm

Bij deze vorm van analyse wordt er verondersteld dat de prior een proper prior is. Een prior is proper als de integrand van de prior verdeling $\pi(\theta)$ over de uitkomstenruimte Θ gelijk is aan 1. Bij impropere priors benadert deze integrand het ∞. Dit komt voor bij een prior verdeling $\pi(\theta)$ die enkel en alleen bestaat uit een constante of uit een log-distributie.

Bij deze vorm van analyse wordt er gekeken naar de risico $r(\pi,\delta)$.
In formulevorm wordt $r(\pi,\delta)$ als volgt geschreven:

$$r(\pi,\delta) = E^{\pi}\left[R(\theta,\delta)\right] = E^{\pi}\left[E_{\theta}^{X}\left\{L(\theta,\delta)\right\}\right] \tag{3.3}$$

Hierbij is :

$R(\theta,\delta)$	de risico functie van de beslissingsregel $\delta(x)$, oftewel het verwachte verlies over x welke verwacht wordt indien beslissingsregel $\delta(x)$ gebruikt wordt.
$\delta(x)$	de beslissingsregel welke aan geeft welke alternatief/ beslissing a wordt gekozen indien x waargenomen wordt.

Tijdens de analyse wordt er verondersteld dat het probleem een eindig risico $r(\pi,\delta)$ heeft.
Het doel bij deze analyse is dat er een regel gekozen zodat de risico $r(\pi,\delta)$, de posterior verwachte verlies oftewel de verwachting van de risico functie $R(\theta,\delta)$ van een beslissingsregel $\delta(x)$, direct geminimaliseerd wordt.

Deze vorm van analyse is over het algemeen moeilijker dan de extensieve vorm van analyse.

3.2.2. Extensieve vorm

Bij deze vorm van analyse wordt er verondersteld dat de prior een proper prior is. Deze vorm kan in tegenstelling tot de normale vorm ook toegepast worden indien $r(\pi, \delta^*)$ oneindig is voor alle δ^*. Hierbij is δ^* een randomized beslissingsregel. Een randomized beslissingsregel is een kansverdeling over A; oftewel als x waargenomen is dan is $\delta^*(x, \mathcal{A})$ de kans dat $\mathcal{A}$ (een subset van A, oftewel een subset van alle mogelijke acties) gekozen wordt.
De Bayes regel kan gevonden worden door een actie voor

Voorbeeld voor A:
De verzameling van de waarden die a kan hebben, oftewel de verzameling van de waarden waarvan aangenomen zou kunnen worden dat dit de grootte van de belastingaanslag zal zijn

(case 2.4)

elke x te kiezen, zodat de verwachte loss minimaliseert, oftewel welke

$$
\begin{aligned}
r(\pi,\delta) &= \int_{\Theta} R(\theta,\delta)dF^{\pi}(\theta) = \int_{\Theta} R(\theta,\delta)\pi(\theta)d\theta = \\
&= \int_{\Theta}\int_{X} L(\theta,\delta)f(x\mid\theta)\pi(\theta)dxd\theta
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

minimaliseert. Om r(π,δ) te minimaliseren, zal die beslissingsregel δ(x) gekozen moeten worden die

$$
\int_{\Theta} L(\theta,a)f(x\mid\theta)dF^{\pi}(\theta) = \int_{\Theta} L(\theta,a)f(x\mid\theta)\pi(\theta)d\theta \tag{3.4}
$$

minimaliseert.

Bij bovenstaande formulering van r(π,δ) is de invloed van de posterior verdeling terug te vinden. De posterior verdeling van θ gegeven x (zie formule (3.1)) wordt namelijk bepaald door $f(\theta|x) \propto f(\theta,x) = \pi(\theta)f(x,\theta)$. r(π,δ) is dus gelijk aan de integrand van de joint verdeling $f(\theta,x) = \pi(\theta)f(x,\theta)$ vermenigvuldigd met de verliesfunctie L(θ,a).

3.2.3. Beslissingsbomen

Als problemen complexer worden, wordt het aangeraden om een beslissingsboom te gebruiken. Met behulp van een beslissingsboom kunnen relaties tussen beslissingen en onzekere gebeurtenissen duidelijk weergegeven worden. De methode om een beslissingsboom op te stellen bestaat uit de volgende stappen:

Definieer kansen — Definieer beloningen

↓

Bepaal verwachte beloningen

Het verschil met voorgaande analyses is dat er nu gekeken wordt naar beloningen in plaats van verlies. Hiervoor heb ik gekozen omdat dit in de literatuur ook gedaan wordt.
Met behulp van case 2.1 wordt de toepassing van de beslissingsboom toegelicht.

Indien er van tevoren bekend is dat leverancier A en leverancier B een aantal uren meer werk moeten verrichten, wanneer kies je dan voor leverancier B?

Voordat er voorbeelden gegeven worden over hoe beloningen en kansen gedefinieerd kunnen worden bij deze case, zal ik eerst de gebruikte parameters toelichten:
θ_A = aantal extra uren bij leverancier A
θ_B = aantal extra uren bij leverancier B
x_{AB}= aantal extra uren bij leverancier A min aantal extra uren bij leverancier B volgens steekproef
A_A= kosten van de aanbieding bij leverancier A
A_B = kosten van de aanbieding bij leverancier B
K_A = kosten per extra uur bij leverancier A
K_B =kosten per extra uur bij leverancier B
C = de waarde van de consequentie

(i) Voorbeeld voor definiëring beloningen:

De kosten die gemaakt worden zijn de kosten van de aanbieding plus de kosten van de extra gewerkte uren. In formulevorm kan dit als volgt beschreven worden:

Kosten indien keuze leverancier A	$A_A + \theta_A * K_A$
Kosten indien keuze leverancier B	$A_B + \theta_B * K_B$

Indien de keuze op leverancier A valt, dan is de beloning gelijk aan de kosten van leverancier B min de kosten van leverancier A, oftewel $(A_B + \theta_B * K_B) - (A_A + \theta_A * K_A)$. Indien de kosten bij leverancier B groter zijn dan bij leverancier A, dan is $(A_B + \theta_B * K_B) - (A_A + \theta_A * K_A) \geq 0$
Hieruit volgt dat de keuze van leverancier A een goede keuze is als

$$\theta_A \leq \frac{A_B + \theta_B K_B - A_A}{K_A}$$

Indien de keuze op leverancier B valt, dan is de beloning gelijk aan de kosten van leverancier A min de kosten van leverancier B, oftewel $(A_A + \theta_A * K_A) - (A_B + \theta_B * K_B)$. Indien de kosten bij leverancier A groter zijn dan bij leverancier B, dan is $(A_A + \theta_A * K_A) - (A_B + \theta_B * K_B) \geq 0$
Hieruit volgt dat de keuze van leverancier B een goede keuze is als

$$\theta_A \geq \frac{A_B + \theta_B K_B - A_A}{K_A}$$

Om niet zoveel variabelen te gebruiken heb ik de volgende aanname gemaakt:
A_A=1000 A_B=1600 K_A=10 K_B=9
Hierdoor is $\frac{A_B + \theta_B K_B - A_A}{K_A} = 60 + 0.9\ \theta_B$
Indien $\theta_A \geq 60+0.9\ \theta_B$ dan is leverancier A dus niet de goede keuze. Is er toch gekozen voor leverancier A dan zal $(A_B + \theta_B * K_B) - (A_A + \theta_A * K_A)$ negatief zijn, oftewel er zal een verlies volgen (een negatieve consequentie).
Andere consequenties zijn in onderstaand tabel gedefinieerd.

	Kies voor leverancier A	Kies voor leverancier B
$\theta_A \geq 60+0.9\ \theta_B$	$(A_B + \theta_B * K_B) - (A_A + \theta_A * K_A)$= -C	$(A_A + \theta_A * K_A) - (A_B + \theta_B * K_B)$= C
$\theta_A \leq 60+0.9\ \theta_B$	$(A_B + \theta_B * K_B) - (A_A + \theta_A * K_A)$= C	$(A_A + \theta_A * K_A) - (A_B + \theta_B * K_B)$= -C

(case 2.1)

(ii) Voorbeeld voor definiëring kansen:

Omdat de informatie van Significant niet volledig is bij case 2.1 heb ik de volgende aannames gemaakt wat betreft de kansen:
$P(\theta_A \geq 60 + 0.9\,\theta_B) = 0.4$
$P(x_{AB} > 200 | \theta_A \geq 60 + 0.9\,\theta_B) = 0.8$ $P(x_{AB} > 200 | \theta_A \leq 60 + 0.9\,\theta_B) = 0.4$

Met behulp van deze aannames kunnen de $P(\theta, x)$ bepaald worden. Deze worden in onderstaand tabel weergegeven.

Kansen	$\theta_A \geq 60+0.9\,\theta_B$	$\theta_A \leq 60+0.9\,\theta_B$
$x_{AB} > 200$	0.32	0.24
$x_{AB} < 200$	0.08	0.36

Naar aanleiding van deze gegevens kan bijvoorbeeld $P\left(\theta_A \geq \frac{A_B + \theta_B K_B - A_A}{K_A} \middle| x_{AB} > 30\right)$ als volgt berekend worden:

$$P\left(\theta_A \geq \frac{A_B + \theta_B K_B - A_A}{K_A} \middle| x_{AB} > 30\right) = \frac{P\left(\theta_A \geq \frac{A_B + \theta_B K_B - A_A}{K_A}, x_{AB} > 30\right)}{P(x_{AB} > 30)} =$$

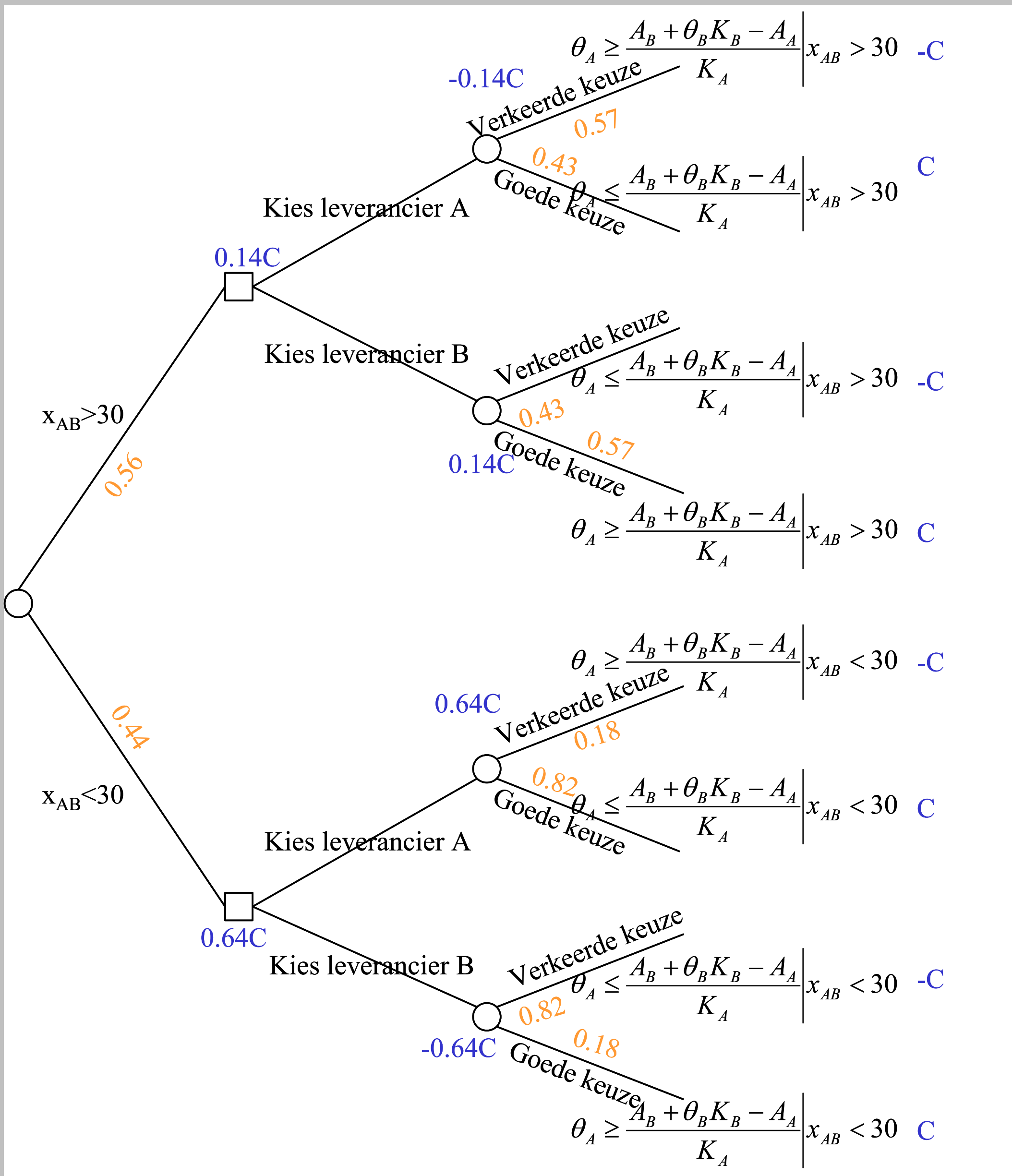
$$= \frac{0.32}{0.32 + 0.24} = \frac{0.32}{0.56} = 0.57$$

Op deze manier kunnen de overige voorwaardelijke kansen ook bepaald worden.

De bepaling van de verwachte beloningen begint aan de rechterkant. Door vervolgens bij een kanspunt de verwachting te bepalen en bij een beslissingspunt de hoogste verwachte beloning te kiezen, kan er een advies gegeven worden over welke leverancier gekozen moet worden.

(iii) Voorbeeld voor bepaling verwachte beloningen:

De bepaling van de verwachte beloningen begint aan de rechterkant (zie figuur op de volgende bladzijde). Door vervolgens bij een beslissingspunt de hoogste verwachte beloning te kiezen en bij een kanspunt de verwachting te bepalen, kan er een advies gegeven worden over welke leverancier gekozen moet worden. Bij een kanspunt wordt de verwachting bepaald volgens de algemene formule $E(X) = \sum_{x \in X} x P(X = x)$



Hierbij is ☐ Een beslissingspunt
◯ Een kanspunt
Een bij behorende kans
De verwachte beloning

Conclusie: Bayes regel

Uit deze beslissingsboom blijkt dat als er uit de steekproef blijkt dat het aantal uren meerwerk bij leverancier A min het aantal uren meerwerk bij leverancier B meer dan 30 uur bedraagt, dat er dan geadviseerd wordt om leverancier B te kiezen. Indien dit niet zo is dan wordt er geadviseerd om leverancier A te kiezen.

(case 2.1)

3.3 Onderzoek naar robuustheid

Gedurende de analyse wordt bepaald wat de Bayes regel is. Met een onderzoek naar de robuustheid van een Bayes regel wordt er onderzocht hoe gevoelig de regel is voor de aannames in het model waarover enige onzekerheid bestaat. Zo kan er bijvoorbeeld gekeken worden of er een andere beslissing geadviseerd wordt, als de prior verdeling $\pi(\theta)$ een klein beetje zou afwijken van datgene wat als prior verdeling is bepaald.

Er zijn drie elementen die op gevoeligheid onderzocht kunnen worden. Dit zijn de volgende drie elementen:

1) robuustheid met betrekking tot de formulering van de prior informatie (de $\pi(\theta)$)
2) robuustheid met betrekking tot de formulering van de steekproef informatie (de $f(x|\theta)$)
3) robuustheid met betrekking tot de formulering van de verlies informatie (de L)

De beste manier om de robuustheid te onderzoeken is om alle elementen te variëren en te bepalen wat de waarschijnlijke veranderingen zijn in het model. Andere manieren om de robuustheid te onderzoeken wordt hieronder per element toegelicht. Indien uit het onderzoek naar robuustheid blijkt dat de beslissingregel robuust is, dan kan er geconcludeerd worden dat er ondanks een eventuele afwijking van de formuleringen van de prior, steekproef en/ of verlies informatie, er toch een grote kans is dat de juiste beslissing het resultaat is van de Bayesiaanse beslissingstheorie.

3.3.1. Robuustheid m.b.t. prior informatie

Bij het meten van de robuustheid met betrekking tot de formulering van de prior informatie (de $\pi(\theta)$) wordt er gebruik gemaakt van de verzameling Γ. Hierbij is Γ de verzameling van alle mogelijke prior verdelingen. Er zijn hierbij 4 verschillende vormen van verzamelingen Γ:

(i) $\Gamma_1=\{\pi : |F^{\pi}(y) - F^{\pi_0}(y)| \le \varepsilon$ voor alle y$\}$. Alle mogelijke priors liggen hierdoor “dicht” bij de subjectief gekozen prior π_0. Dit is de meest-aantrekkelijke verzameling, maar er kan niet-robuustheid in de staarten optreden.

(ii) $\Gamma_2=\{\pi: |z(\alpha_i)-z_0(\alpha_i)| \le \varepsilon, i=1,\dots,k\}$. Hierbij zijn $z(\alpha_i)$ en $z_0(\alpha_i)$ de α_i-kwantielen van π en π_0 respectievelijk. Omdat de subjectieve prior vaak naar aanleiding van verschillende kwantielen vastgesteld wordt, is dit een verklaarbare verzameling.

(iii) $\Gamma_3=\{\pi: |\mu_i - \mu_i^0| \le \varepsilon, i=1,\dots,k\}$. De μ_i en de μ_i^0 zijn hierbij gelijk aan $E^{\pi}[\theta_i]$ respectievelijk $E^{\pi 0}[\theta_i]$. De k-momenten van de priors zorgen ervoor dat ze beperkt worden door de eerste k-momenten van de subjectieve prior verdeling π_0. Het is echter moeilijk om subjectief de prior momenten te schatten, behalve als Θ is begrensd.

(iv) $\Gamma_4=\{\pi$: π heeft een verdeling van een gegeven functionele vorm, $\pi(\theta|\gamma_1,\dots,\gamma_k)$, $\gamma_i \in A_i$, $i=1,\dots,k\}$. Hierbij zijn de parameters van een gegeven functionele vorm van de prior verdelingen beperkt tot een zekere verzameling A_i.

De robuustheid van beslissingsregel δ met betrekking tot de verzameling Γ kan op 2 manieren gemeten worden:
▪ posterior robuustheid
▪ risico robuustheid

Posterior robuustheid
Het meten van de robuustheid gebeurt bij deze methode via het analyseren van de posterior verwachte loss door veranderingen in de prior. Deze analyse bestaat uit het onderzoeken hoe dichtbij a_0 bij de Bayes actie a_π voor de verschillende priors $\pi \in \Gamma$. Hierbij is

a_0: ε-posterior robuust als voor alle $\pi \in \Gamma$ de posterior verwachte loss van a_0 een maximale afwijking van ε heeft van de optimale posterior verwachte loss.

a_π: de actie waarbij de posterior verwachte loss geminimaliseerd wordt.

De posterior robuustheid is alleen te bepalen als de steekproef informatie meer invloed heeft dan π. Nadelen van het bepalen van de robuustheid via de posterior robuustheid zijn:
- het is moeilijk om met posterior robuustheid te werken
- de posterior robuustheid is sterk afhankelijk van welke x is waargenomen

Risico robuustheid
Het doel bij het bepalen van de risico robuustheid is het evalueren van de robuustheid met betrekking tot de verzameling Γ zodat er eventueel een regel verkregen wordt die gevoelig is voor goed-gespecificeerde gedeelten van de prior en ongevoelig is voor onzekerheden in de prior.
De risico robuustheid kan eenvoudig bepaald worden door de risico functies $R(\theta, \delta)$ van de verschillende beslissingsregels te berekenen en te vergelijken. De beslissingsregels die hierbij vaak gebruikt worden zijn de Bayes regels δ^π waarbij $\pi \in \Gamma$.

De formele manier om de risico robuustheid te bepalen is via de Γ-minimax-benadering of de Γ-minimax-spijt-benadering.
- Γ-minimax-benadering
  Via deze benadering wordt de Γ-minimax regel bepaald. Deze Γ-minimax regel zorgt ervoor dat er een zo laag mogelijke Bayes risico gelopen wordt. Zo wordt δ_1^* geprefereerd t.o.v. δ_2^* als $r_\Gamma(\delta_1^*) < r_\Gamma(\delta_2^*)$. Hierbij is $r_\Gamma(\delta^*) = \sup_{\pi \in \Gamma} r(\pi, \delta^*)$ = de maximale verwachte verlies bij beslissingsregel δ^*
- Γ-minimax-spijt-benadering
  Via deze benadering wordt er voorkomen dat de regel beïnvloedt wordt door priors die niet al te waarschijnlijk zijn. Dit wordt voorkomen door $r_\Gamma(\delta^*)$ gelijk te stellen aan $\sup_{\pi \in \Gamma} \{r(\pi, \delta^*) - r(\pi)\}$. Wederom wordt δ_1^* geprefereerd t.o.v. δ_2^* als $r_\Gamma(\delta_1^*) < r_\Gamma(\delta_2^*)$.

Er zijn daarnaast verscheidene versies van Γ-minimaxity gebaseerd op de posterior verwachte verlies. Deze blijken tot nu toe nog steeds inadequaat te zijn.

3.3.2. Robuustheid m.b.t. steekproef informatie

Omdat robuustheid met betrekking tot $f(x|\theta)$ een belangrijke invloed kan hebben op de regel, wordt er geadviseerd om verschillende waarschijnlijke modellen te proberen. Op deze manier kan er onderzocht worden hoe gevoelig de conclusie is voor het model.

3.3.3. Robuustheid m.b.t. verlies informatie

Beslissingsregels zijn over het algemeen robuust voor de specificatie van "grote" fouten. Dit kan verklaard worden doordat de kans op een extreme grote fout klein is in de meeste statistische onderzoeken. Daarnaast zijn de staarten van de steekproef verdeling normaliter “scherper” dan de staarten van L. De exacte vorm van L voor kleine fouten is in het algemeen niet heel belangrijk. Bij de problemen waar het wel belangrijk is en bij de problemen waar het minder belangrijk is, is het vaak mogelijk om L accuraat te formuleren zodat het voorkomen van kleine fouten nauwelijks voorkomt. Het gewicht-factor $w(\theta)$ kan een grote invloed uitoefenen op de robuustheid, omdat de fout gemultipliceerd wordt. Doordat $w(\theta)$ dezelfde invloed heeft op de beslissingsregel als de prior verdeling $\pi(\theta)$, is de robuustheid met betrekking tot $w(\theta)$ inbegrepen in de prior verdeling $\pi(\theta)$.

Hoofdstuk 4

Tot slot:

Wanneer en waarom heeft de Bayesiaanse beslissingstheorie een toegevoegde waarde volgens de Bayesianen.

Wanneer?

Door de moeilijkheden gedurende het goed formuleren van de informatie en het uitvoeren van een Bayesiaanse analyse zijn de formule's van Bayes beperkt toepasbaar. Het wordt aangeraden om een Bayesiaanse analyse uit te voeren indien:

- prior en verlies informatie een cruciaal onderdeel van het probleem vormen. Als de steekproef informatie de beslissing grotendeels bepaalt, dan heeft het gebruik maken van prior geen toegevoegde waarde voor het bepalen van een goede beslissing.
- er een probleem opgelost wordt die logische klassieke oplossingen heeft, maar waar significante prior informatie beschikbaar is. Bij dit probleem zal de Bayesiaanse analyse zorgvuldig en voorzichtig uitgevoerd moeten worden. Zo is het onder andere belangrijk dat de conclusie robuust is voor de prior informatie.
- als er alleen vage prior of geen prior informatie beschikbaar is, dan zijn er bepaalde Bayesiaanse procedures en bepaalde Bayesiaanse empirische regels die een voorkeur voor een bepaalde beslissing genereren. Hier zijn twee andere analyse vormen voor, namelijk de vorm waarbij de gegeneraliseerde Bayes regel toegepast wordt en de empirische vorm. Deze vormen van analyse worden toegelicht in "Statistical Decision Theory"

Waarom?

De redenen die naar voren kwamen uit het literatuuronderzoek om de Bayesiaanse beslissingstheorie toe te gaan passen zijn de volgende:

- Met behulp van simulaties en/ of experimenten kon er geconcludeerd worden dat de beslissingsregels die voortvloeiden uit de Bayesiaanse beslissingstheorie realistischer zijn dan die van de klassieke metingen
- Bij de meeste omstandigheden komt een bijbehorende willekeurige logische statistische procedure overeen met een Bayesiaanse procedure die gebruik maakt van prior informatie.
- Gedrag is vaak naar aanleiding van prior informatie. Een voorbeeld hiervan is self-fulfilling prophecy.

Er zijn ook redenen die naar voren kwamen om niet de Bayesiaanse beslissingstheorie toe te passen. Zo is de voornaamste beperking van de Bayesiaanse beslissingstheorie de grote kans op verkeerde beslissingen indien er een verkeerde prior verdeling is gekozen. Met behulp van een robuustheid onderzoek kan de mogelijkheid op een verkeerde beslissing door een verkeerde prior al van tevoren gedetecteerd worden en kan men zodoende overstappen op een andere kwantitatieve methode.

Een andere beperking is het gemis aan objectiviteit gedurende het uitvoeren van de Bayesiaanse analyse. Uit onderzoek blijkt echter dat het gebruik maken van ingewonnen (eventueel subjectieve) informatie zorgt voor een grotere kans dat de goede beslissing wordt genomen. Om te voorkomen dat er verkeerde ingewonnen informatie wordt gebruikt, is het van belang dat de Bayesiaanse analyse zorgvuldig en voorzichtig uitgevoerd wordt.

Literatuurlijst

- James O. Berger (1980), Statistical Decision Theory, Springer-Verlag New York Inc.

- J.M. Bernardo(1994), A.F.M. Smith, Bayesian theory, Wiley

- C. G. Boender, H.K. van Dijk(1991), Bayes estimates of multi-criteria decision
- alternatives using Monte-Carlo integration, Tinbergen institute

- J.B. Carlin, A. Gelman, D.B. Rubin, H.S. Stern(1995), Bayesian data analysis, Chapman & Hall

- R.M. Cyert, M.H. DeGroot(1987), Bayesian analysis and uncertainty in economic theory, Chapman & Hall

- S. French, J.Q. Smith(1997), The practice of Bayesian analysis, Arnold

- H.W. Gottinger, Bayesian Analysis Probability and Decision, Vandenhoeck & Ruprecht

- M.H. DeGroot(1970), Optimal statistical decisions, McGraw-Hill

- G.D. Kleiter(1980), Bayes Statistik, De Gruyter Berlin New York

- P.M. Lee(1997), Bayesian statistics, an introduction, Arnold

- B. Morgan(1968), An introduction to Bayesian statistical decision theory, Prentice-Hall

- J. Pearl(1985), Bayes Decision methods, June 1985, UCLA

- H. Raiffa and R. Schlaifer(1961), Applied Statistical Decision Theory, Division of Research, Graduate school of business administration, Harvard University, Boston

- J.Q. Smith(1988), Decision analysis, a Bayesian approach,1988, Chapman & Hall

- S.A. Schmitt(1969), Measuring uncertainty, an elementary introduction to Bayesian statistics, Addison-Wesley