De eerlijkheid van spellen

BWI-werkstuk door

Björn Scholts

begeleider: prof. dr. Rob van der Mei

Voorwoord

Dit werkstuk gaat over de eerlijkheid van spellen. Daar ben ik vanuit mijn hobby in geïnteresseerd. Die hobby is het spelen van gezelschapsspellen, onder andere in een spelgroep. Met die spelers bespreken we na het spelen van een nieuw spel vaak het voordeel van de beginnende speler. Soms hoor je dan ook 'Is het wel een voordeel om te beginnen?'

Bij sommige spellen is er duidelijk een compenserende factor ingebouwd om het nadeel van niet beginnen te niet te doen. De vraag is dan natuurlijk of er niet overgecompenseerd wordt.

Deze gezelschapsspellen zijn vaak representaties van de werkelijkheid. Soms is dat heel realistisch en soms niet. Echter komen er in de werkelijkheid ook een heleboel situaties voor die eigenlijk een spel zijn en wel "om de knikkers". De uitdrukking "Het is maar een spelletje" gaat dan niet op. Die spellen worden in met behulp van speltheorie beschreven en geanalyseerd.

In de speltheorie wordt onder andere gezocht naar de optimale strategie van de spelers. Daarbij zijn er voor verschillende soorten spellen verschillende technieken, daarvan heb ik mij nu op een klein gedeelte gericht.

De maatschappelijke relevantie van spellen en het mogelijke gebruik van de automatisering bij het zoeken naar oplossingen maakt speltheorie tot een geschikt onderwerp voor een BWI-werkstuk.

Amsterdam, augustus 2004
Björn Scholts

Inhoudsopgave

1.1 Inleiding

Dit BWI-werkstuk gaat over de eerlijkheid van spellen. Om daarover iets te kunnen zeggen moet eerst duidelijk zijn wat een spel is en wat er precies onder eerlijkheid verstaan kan worden. Speltheorie biedt daar uitkomst. Vaak wordt er gerefereerd aan gezelschapsspelletjes, omdat deze duidelijk geformuleerde regels hebben. Dit laatste in tegenstelling tot spellen uit de werkelijkheid, zoals veilingen en prijsstrategieën. Hierbij is niet bekend wat de andere spelers precies weten, zouden kunnen weten en welke opties zij precies hebben. Dit maakt het opstellen van een model een stuk lastiger voor spellen uit de werkelijkheid dan voor gezelschapsspellen of gedefinieerde spellen.

1.1 Wat is een spel?

Wat is een spel? In de Van Dale staat het volgende:

spel (het ~, ~len, ~en, ~en)

1 bezigheid ter ontspanning volgens vaste regels met elementen als verbeelding, competitie, behendigheid, inzicht en kans
2 partij, wedstrijd
3 stel benodigdheden voor een spel ter ontspanning
4 techniek van acteren => *toneelspel*
5 vrije of onberekenbare werking of beweging van een orgaan, van krachten of verschijnselen
6 het bespelen van een muziekinstrument, wijze van spelen
7 toneelstuk

Vooral de eerste betekenis is voor de toepasbaarheid van speltheorie van belang, echter worden de spellen uit de werkelijkheid door de Van Dale over het hoofd gezien.

Binnen de speltheorie wordt echter vaak alleen gekeken naar spellen waarbij er twee of meer spelers zijn, waar deze spelers keuzes moeten maken met betrekking tot hun strategie, er een uitkomst is van het spel welke afhangt van de strategische keuzes van alle spelers. Deze uitkomst kan zijn dat een speler wint en de andere spelers verliezen, of alle spelers maken winst (ten koste van een niet-meespelende partij). Gokspellen, zoals roulette en de lotto, vallen buiten deze beperkingen, omdat de uitkomst niet afhangt van de strategie van de speler, maar van het toeval. Ook speelt elke speler in feite afzonderlijk en is er geen interactie tussen de spelers en hun strategie, hierdoor is het resultaat onafhankelijk van het aantal spelers en kun je dus stellen dat het een spel voor één speler is. De bank is geen speler, want deze maakt geen keuzes.

De eerste betekenis “bezigheid ter ontspanning volgens vaste regels met elementen als verbeelding, competitie, behendigheid, inzicht en kans” kan gecombineerd met de derde betekenis “stel benodigdheden voor een spel ter ontspanning” als basis dienen voor een definitie van een spel in speltheoretische context:

Spel: Geheel van vaste regels met elementen als inzicht, kans, opties en uitkomsten.

1.2 Wat is eerlijk?

Wat is eerlijk? Deze vraag hangt samen met de volgende vraag: “Hebben alle spelers een gelijke kans om te winnen?” En dit ongeacht de bordstelling waarmee het spel aanvangt, als daar verschillen in zijn. Dit zou je ook gebalanceerd kunnen noemen, met name als niet alle spelers dezelfde opties hebben, doordat er verschillende rollen in het spel zijn. De speler die mag beginnen heeft een andere rol dan de speler die daarna een actie mag doen. De tweede speler kan reageren op de eerste speler. Er zijn ook spellen waarbij niet iedere speler dezelfde opties heeft, zoals in een spelletje waarin zeventien geitjes vier tijgers proberen in te sluiten, terwijl de tijgers elf geitjes proberen te vangen, de speler met de geitjes heeft andere opties als de speler met de tijgers. Ook moeten alle spelers even sterk zijn. Als dat laatste het geval is, dan is het triviaal de rolverdeling van de spelers met behulp van een eerlijke willekeurige methode te bepalen. Iedere speler heeft nu dezelfde kans op de rol met de meeste winstkansen.

Er wordt over winst*kansen* van een rol gesproken, omdat er vaak in spellen een toevalsfactor aanwezig is. In een gezelschapsspel is dat bijvoorbeeld een dobbelsteen die bepaalt hoeveel vakjes je mag/moet lopen. In de werkelijkheid kan dat bijvoorbeeld de stand van de rente zijn, die weer het budget bepaalt dat je kunt besteden. De spelers hebben hier geen invloed op, ze kunnen hoogstens voorspellingen doen.

In het hoofdstuk 2 wordt een specifieke definitie gegeven van eerlijkheid.

1.3 Vraagstelling

De centrale vraagstelling in dit werkstuk is: “Hoe kun je nu daadwerkelijk nagaan of een spel eerlijk is?” Om te beantwoorden moet eerst de vraag “Wat is eerlijk?” beantwoord worden.

Dit is een belangrijke vraag, want als een spel een (zwaar) voordeel voor een van de spelers heeft, dan heeft meespelen voor sommige potentiële spelers geen zin, of te weinig zin.

De organisator van het spel wil dit soms ook weten. Van een veiling die door de overheid georganiseerd wordt zouden de spelers mogen verwachten dat deze eerlijk is. De overheid mag niet partijdig zijn. Daar tegenover staat dat de overheid concurrenten niet de mogelijkheid mag bieden elkaar in één keer uit te schakelen. De optie om tot een monopoliepositie te komen moet al helemaal voorkomen worden.

1.4 Opbouw werkstuk

Om tot een antwoord op de centrale vraagstelling te komen volgen er in hoofdstuk 2 eerst een aantal definities en standaard voorbeelden van spellen, waarin ook het begrip eerlijkheid wordt omschreven. Daarna worden enkele basiskenmerken van spellen gebruikt om spellen te kunnen classificeren in hoofdstuk 3. Hierbij valt op dat spellen vaak elementen gebruiken uit verschillende klassen. Bij deze elementen moet je een stukje theorie zoeken, zodat er een model gevormd kan worden. Daarbij kom je talloze problemen tegen, deze worden in hoofdstuk 4 aangestipt. Echter niet voordat er enkele voorbeelden van spellen uit de werkelijkheid zijn gegeven.

Om de eerlijkheid van een spel te bepalen blijkt men het spel eerst op te moeten lossen. Hoe dat gaat valt onder de theorie. Echter neemt de complexiteit van een spel vaak gigantische proporties aan. Daardoor wordt het oplossen van een spel erg tijdrovend en moeten intuïtive methoden de rekentijd beperken. Dit staat in hoofdstuk 5.

Ter illustratie volgen er in hoofdstuk 6 nog enkele uitwerkingen van spellen en wordt de eerlijkheid bepaald. Ook wordt snel duidelijk dat de complexiteit van een schijnbaar zeer eenvoudig klein spel behoorlijk op kan lopen. Het geheel wordt met de conclusies in hoofdstuk 7 afgesloten.

1.5 BWI-relevantie

BWI is een studie met drie aandachtspunten, die elkaar aanvullen. De aandachtspunten zijn B(edrijfskunde), W(iskunde) en I(nformatica). De toepasbaarheid van de theorie op de werkelijkheid maakt speltheorie tot een onderdeel van de bedrijfskunde. Het feit dat daarbij wiskundige methoden gebruikt worden maakt het een onderdeel van de wiskunde. Bij het analyseren van een spel wordt, wegens de complexiteit van de spellen, vaak noodzakelijkerwijs gebruikgemaakt van computers, hierdoor is ook informatica een relevant aandachtspunt.

2 Speltheorie

Nu volgen er enkele basisproblemen uit de speltheorie. Deze problemen tonen ook enkele basiseigenschappen. Het gaat hierbij telkens om 2-spelers spellen, tenzij anders vermeld. Verder worden er enkele eigenschappen van 'oplossingen' van een spel besproken. Bij de ontleding van spellen spelen deze basisproblemen een belangrijke rol.

2.1 Axioma's

Bij alle voorbeelden gelden de volgende axioma's:

1. Elke speler wil zijn/haar eigen nut (winst) maximaliseren.
2. Alle spelers hebben een perfect geheugen.
3. Alle spelers gebruiken hun gezond verstand. Zij zijn rationeel.

Deze axioma's gaan in werkelijkheid niet altijd op. Zo zijn de doelstellingen van de spelers niet altijd helder, het spel is vaak een onderdeel van een groter spel. Ook hebben spelers geen perfect geheugen. Hierdoor worden er soms gegevens die onbelangrijk lijken niet onthouden.

2.2 Prisoner's dilemma (dominante strategie)

In het prisoner's dilemma zijn de spelers twee criminelen die gepakt zijn. Er wordt hen beide een voorstel gedaan. Als zij bekennen en tegen de ander getuigen, dan krijgen ze strafvermindering. Als één van beide bekent en getuigt, dan wordt hij vrijgelaten en de ander krijgt 10 jaar cel. Bekennen ze allebei, dan krijgen ze beide 4 jaar cel. Bekennen ze allebei niet, dan is er slechts genoeg bewijs voor een veroordeling tot 2 jaar cel voor beide. Zij weten niet van elkaar wat zij doen.

Als je nu de "uitbetaling" (straf) uitzet in een tabel, dan krijg je de volgende tabel:

Speler 1 / *Speler 2*	Bekennen	Niet-bekennen
Bekennen	(4 , *4*)	(0 , *10*)
Niet-Bekennen	(10 , *0*)	(2 , *2*)

Tabel 1: Prisoner's dilemma

Speler 1 redeneert als volgt: Als speler 2 bekent, dan krijg ik 10 jaar als ik niet beken en 4 als ik wel beken. Bekennen is dan gunstiger. Als speler 2 niet bekent, dan krijg ik 2 jaar als ik niet beken en 0 jaar als ik wel beken. Bekennen is ook nu gunstiger. Het maakt niet uit wat speler 2 doet, bij elke keuze van speler 2 is bekennen gunstiger, ik beken dus.

Speler 2 redeneert precies hetzelfde. Bekennen is de dominante strategie, dat wil zeggen dat een speler ongeacht wat de tegenstander zou doen altijd hetzelfde zou kiezen. Beide spelers bekennen dus en ze krijgen beide 4 jaar. Uit de tabel is duidelijk te zien dat beide spelers beter af zijn als ze beide niet bekennen, ze krijgen dan maar 2 jaar.

Er is ook een meer formele vorm om spellen uit te schrijven. Voor het prisoner's dilemma ziet dat er als volgt uit: $\Gamma = \left[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$. In deze notatie is de naam van het spel Γ. I is de verzameling spelers, in dit geval dus $I = \{1,2\}$. S_i is de verzameling van alle mogelijke strategieën van speler *i*, in dit voorbeeld voor beide (alle) spelers $S_i = \{Bekennen, Niet-bekennen\}$. ($\{S_i\}$ is de verzameling van alle verzamelingen S_i voor alle *i*.) Ten slotte is $u_i(\cdot)$ de uitbetalingsfunctie voor speler *i*, bij een combinatie van gekozen strategieën. In dit voorbeeld krijg je dan $u_1(Bekennen, Bekennen) = 4$; $u_1(Bekennen, Niet-bekennen) = 0$; $u_1(Niet-bekennen, Bekennen) = 10$; $u_1(Niet-bekennen, Niet-bekennen) = 2$; $u_2(Bekennen, Bekennen) = 4$; $u_2(Bekennen, Niet-bekennen) = 10$; $u_2(Niet-bekennen, Bekennen) = 0$; $u_2(Niet-bekennen, Niet-bekennen) = 2$. Deze vorm is voor de iets minder geoefende lezer minder makkelijk te lezen, dan de representatie in matrixvorm. Zolang het aantal opties niet al te groot is kan er ook een spelboom getekend worden. Het spel begint bij de wortel van de boom en verschillende opties worden door de takken gerepresenteerd. De uitbetalingen staan dan op de bladeren van de boom. De spelboom van het prisoner's dilemma wordt gegeven in de sectie over reactieve en simultane beslissingen.

2.3 Coördinatie-spel

Bekijk nu het spel met de volgende uitbetalingtabel:

Speler 1 / *Speler 2*	Keuze A	Keuze B
Keuze A	(15 , *15*)	(0 , *0*)
Keuze B	(0 , *0*)	(5 , *5*)

Tabel 2: Coördinatie spel

Er is nu geen dominante strategie die onafhankelijk is van de keuze van de andere spelers. Er moet op een andere manier gezocht worden naar een oplossing. Voor beide spelers hangt de beste strategie af van de strategie van de andere speler. Als speler 1 kiest voor keuze A, dan is het voor speler 2 het verstandigst om ook voor keuze A te kiezen. En zo kun je beredeneren dat het voor beide spelers het beste is om hetzelfde te doen als de andere speler.

Door overleg toe te laten ontstaat er een manier om tot een zelfde keuze te komen. Als de spelers samen mogen werken dan komen ze tot een oplossing, met andere woorden als dat niet mag, dan komen ze wellicht niet tot een oplossing. Of tot een niet optimale oplossing. Als de spelers uit het prisoner's dilemma mochten overleggen, dan zouden ze beide niet bekend hebben en er met slechts 2 jaar cel vanaf gekomen zijn.

2.4 Zero-sum-spel vs. non-constant sum-spel

Een zero-sum spel is een spel waarbij de uitbetaling aan een speler betaald wordt door de andere speler(s). Dat wil zeggen als speler 1 wint, dan verliest speler 2 (in een 2-spelers spel). Een eenvoudig veelgebruikt voorbeeld hiervan is het spelletje 'matching pennies' waarbij beide spelers een penny inzetten en laten zien. Ze kunnen allebei kiezen of ze 'Kop' of 'Munt' laten zien. Als beide spelers hetzelfde laten zien, dan krijgt speler 1 beide pennies, hebben de spelers iets anders gekozen, dan krijgt speler 2 beide pennies.

Speler 1 / *Speler 2*	Kop	Munt
Kop	(1 , -*1*)	(-1 , *1*)
Munt	(-1 , *1*)	(1 , -*1*)

Tabel 3: Matching pennies

De beste strategie is nu voor speler 1 om hetzelfde te kiezen als speler 2 en voor speler 2 is de beste strategie om niet hetzelfde te kiezen als speler 1. Omdat deze strategieën niet overeenkomen, zullen de spelers niet tot overeenstemming kunnen komen en moeten ze onafhankelijk van elkaar een keuze maken. De spelers zijn elkaars tegenstanders. De som van de uitbetalingen is voor elke uitkomst gelijk aan 0.

Is dit laatste nu niet het geval, maar wijkt er (minstens) één af, dan heeft die uitkomst een afwijkend nut ten opzichte van de andere uitkomsten. Hierdoor zouden de spelers samen kunnen werken om deze afwijkende uitbetaling te ontwijken of te behalen. Het zou logisch zijn de totale uitbetaling te maximaliseren. Door de spelers (buiten het spel om) te compenseren voor hun verlies (ten opzichte van hun ideale strategie) kan dit vaak gerealiseerd worden. Er is dan sprake van een non-constant-sum spel.

Bij een constant-sum spel kan de (constante) winst (of het verlies) achteraf gelijk verdeeld worden en verder buiten beschouwing gelaten worden. Als je deze verdeling in de uitbetalingtabel verwerkt blijft er een zero-sum spel over. Bij een non-constant-sum spel kun je het spel zelf tot speler benoemen. Een winst voor de spelers wordt dan betaalt door het spel en een verlies van de spelers is dan winst voor het spel. Het spel wordt dan een zero-sum spel.

2.5 Nash-equilibrium

Een Nash-equilibrium is een evenwichtssituatie waarin geen van de spelers erop vooruit zou gaan als hij/zij van strategie verandert, terwijl alle andere spelers hun strategie behouden.

In het prisoner’s dilemma is er één Nash-equilibrium. Het was ongeacht de strategie van de ander altijd gunstiger om te bekennen. Vanuit de situatie die voor beide spelers gunstiger is, waar beide niet bekennen, is het voor iedere speler afzonderlijk gunstig om van strategie te wijzigen. Alleen een herenakkoord zou de spelers ervan moeten weerhouden dit niet te doen.

In het voorbeeld dat is gegeven ter illustratie van het coördinatie spel zijn er twee Nash-equiliria. Als beide spelers dezelfde keuze hebben gemaakt, dan is het niet verstandig om eenzijdig van strategie te veranderen. Hierdoor zijn de twee situaties waarin de spelers voor dezelfde optie gaan beide een Nash-equilibrium. De situaties waarin er door de spelers verschillend gekozen word is duidelijk geen Nash-equilibrium, want beide spelers kunnen hun eigen positie verbeteren door hun strategie aan te passen aan die van de ander.

Bij matching pennies is er helemaal geen Nash-equilibrium. Als de verliezer van het spel zijn strategie wijzigt, wordt hij/zij plotseling de winnaar en de oorspronkelijke winnaar weer de verliezer. Vanuit deze nieuwe situatie kan de oude winnaar/nieuwe verliezer zichzelf verbeteren door ook van strategie te veranderen. Op deze manier kan vanuit elke situatie telkens een van beide spelers zijn/haar resultaat verbeteren.

Een spel waarbij de spelers primair aan zichzelf denken neigt tot een resultaat te komen dat een Nash-equilibrium is. Dit komt doordat alle spelers kiezen voor een optie die ongeacht het effect voor de tegenstander een beter resultaat geeft voor henzelf.

2.6 Pareto-efficiënt

Een uitkomst is Pareto-efficiënt als er geen andere uitslag van het spel is waarbij geen van de spelers er slechter vanaf komt en er minstens een speler op vooruit gaat. Een Nash-equilibrium is vaak niet Pareto-efficiënt.

Neem bijvoorbeeld het prisoner’s dilemma, dan zien we dat het Nash-equilibrium niet Pareto-efficiënt is. Het herenakkoord levert voor alle spelers een beter resultaat. Dat herenakkoord zelf is wel Pareto-efficiënt, voor een individuele speler zijn er wel gunstigere oplossingen, maar die gaan ten koste van de andere spelers.

Bij het coördinatie-spel is er weer een Pareto-efficiënte oplossing, namelijk wanneer beide spelers gaan voor optie A met een uitbetaling van vijftien voor elk. Het andere Nash-equilibrium is niet Pareto-efficiënt, omdat er tussen alle andere uitkomsten een gunstiger resultaat te behalen is voor minstens één van de spelers. In dit geval zelfs voor beide spelers.

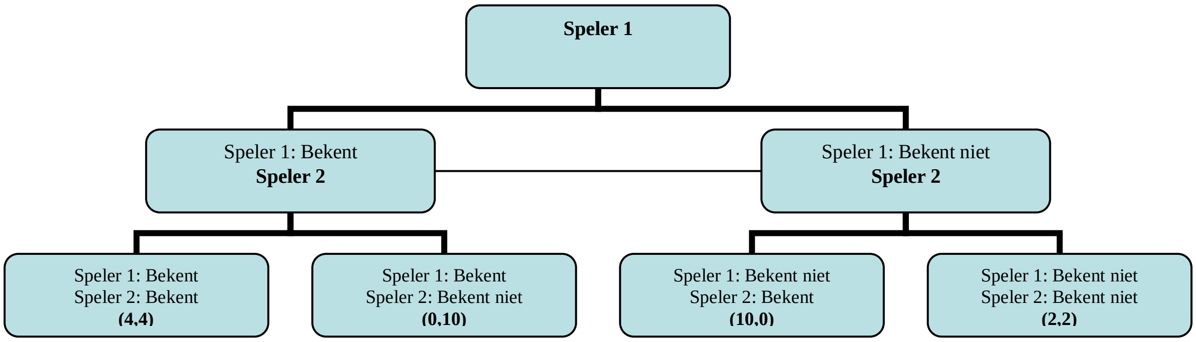
Matching pennies heeft vier Pareto-efficiënte oplossingen. De winnaar van het spel kan er nooit op vooruit gaan, dus zou de verliezer dat moeten doen. Wil de verliezer erop vooruit gaan, dan gaat dit ten koste van de winnaar. Er is dus geen andere uitkomst waarin er niemand op achteruit gaat en er minstens iemand op vooruit gaat. Dit gaat op voor elk constant-sum spel.

Een spel waarbij de spelers niet alleen aan zichzelf denken maar daarnaast ook aan de andere spelers neigt tot een Pareto-efficiënte uitslag te komen.

2.7 Reactief vs. simultaan en subspellen

Spellen zijn vaak een aaneensluiting van subspellen. De spelers spelen afhankelijk van de uitkomst van het eerste spel een tweede spel, eventueel gevolgd door een derde spel en daarna wellicht nog meer spellen. Al deze (sub)spellen tezamen vormen het volledige spel. Verder kunnen de spelers hun keuze simultaan maken of in reactie op de keuze(s) van de andere speler(s).

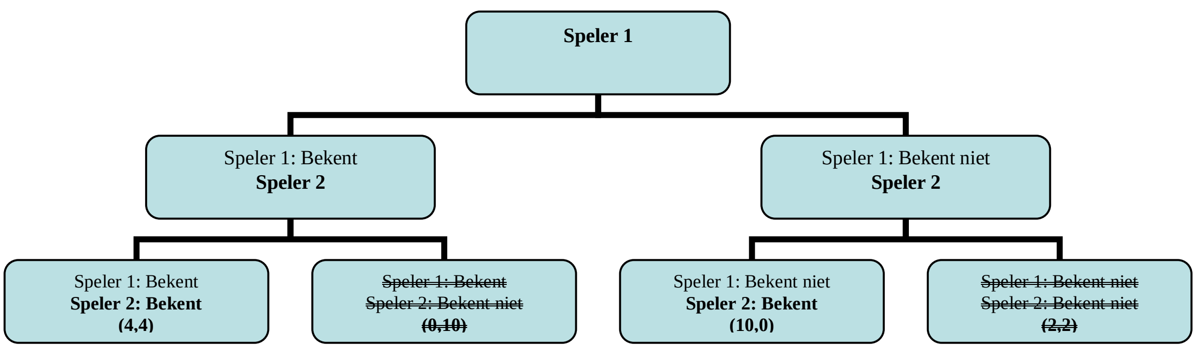
Om een spel beter te kunnen analyseren is het handig om het spel op te delen in zoveel mogelijk subspellen. Een manier om dit weer te geven is met behulp van een spelboom.



Figuur 1: Spelboom prisoner's dilemma

Zie hier het prisoner's dilemma weergegeven in boomvorm. Eerst maakt speler 1 zijn keuze, je kunt dan in twee situaties terecht komen. Daarna maakt speler 2 zijn keuze. Speler 2 weet echter niet of hij/zij in de linker of in de rechter tak van de boom zit, dit geef ik weer door de horizontale verbinding tussen de twee knooppunten. Nadat beide spelers hun keuze gemaakt hebben is het resultaat bekend. De horizontale verbinding geeft ook aan dat deze zet van speler 2 simultaan wordt gedaan met de zet van speler 1. Dit is een grafische weergave van de eerder gegeven formele notatie, een combinatie van strategieën resulteert in een pad door de boom, van stam tot blad. Zo'n getekende boom is een stuk eenvoudiger te lezen, maar zoals in de voorbeelden in een later hoofdstuk te zien is wordt een getekende boom representatie uiteindelijk ook onoverzichtelijk. Voor de basisvoorbeelden werkt de boomweergave echter uitstekend.

Stel dat speler 2 wel op de hoogte is van de keuze van speler 1 en daar dus op kan reageren, dan kiest hij als speler 1 bekent heeft voor bekennen en als speler 1 niet bekent heeft ook voor bekennen. Speler 1 kan nu zijn opties doorrekenen en de gevolgen daarvan aantekenen in de boom. Deze komt er dan als volgt uit te zien.



Figuur 2: Spelboom reactief prisoner's dilemma

Nu ziet speler 1 dat bekennen 4 jaar cel oplevert en niet bekennen 10 jaar, speler 1 kiest dus voor bekennen. De twee situaties waarin speler 2 zich kan bevinden zijn subspellen van het gehele spel. Bij uitvoering komt de situatie waarin speler 1 niet bekent niet voor.

Nu is er nog een verschil tussen spellen waarbij alle spelers simultaan hun zetten doen, dus zonder dat zij weten wat de andere spelers doen en spellen waarbij de spelers op elkaar reageren. Die laatste categorie is weer op te delen in spellen waarbij iedere speler alle voorgaande keuzes van alle spelers kent (perfect information) en spellen waarbij sommige spelers alles weten en andere spelers simultaan moeten zetten (imperfect information). Dit laatste is een mengvorm die alleen mogelijk is bij meer dan twee spelers. Boter-kaas-en-eieren en schaken zijn typische voorbeelden van (perfect information) reactieve spellen. Matching pennies is een voorbeeld van een simultaan spel.

2.8 Coöperatief vs. niet-coöperatief

De samenwerking uit het coördinatie spel is op basis van goed vertrouwen, het staat beide spelers vrij om zich niet aan de afspraak te houden. Nu is dat in het voorbeeld niet zo heel voor de hand liggend, omdat het eenzijdig afwijken van de strategie tot een slechter resultaat leidt. Beschouw je nu de tabel van het prisoner’s dilemma, dan zou de (Pareto-efficiënte) oplossing *(niet bekennen, niet bekennen)* de meest logische afspraak zijn. Echter zijn beide spelers vrij om zich niet aan de afspraak te houden en toch te bekennen, zodat de speler er zelf op vooruit gaat. In dit geval moeten beide spelers elkaar vertrouwen.

Nu zou er een externe partij kunnen zijn die ervoor kan zorgen dat de afspraken ook nagekomen worden. In dat geval spreekt men van een coöperatief spel. Als deze afspraken niet nagekomen hoeven te worden, dan spreekt men over een niet-coöperatief spel. Dat laatste houdt dus niet in dat er niet samengewerkt kan worden. Evenzo is het in een coöperatief spel niet verplicht om samen te werken.

2.9 Voorbeeld van een coöperatief spel

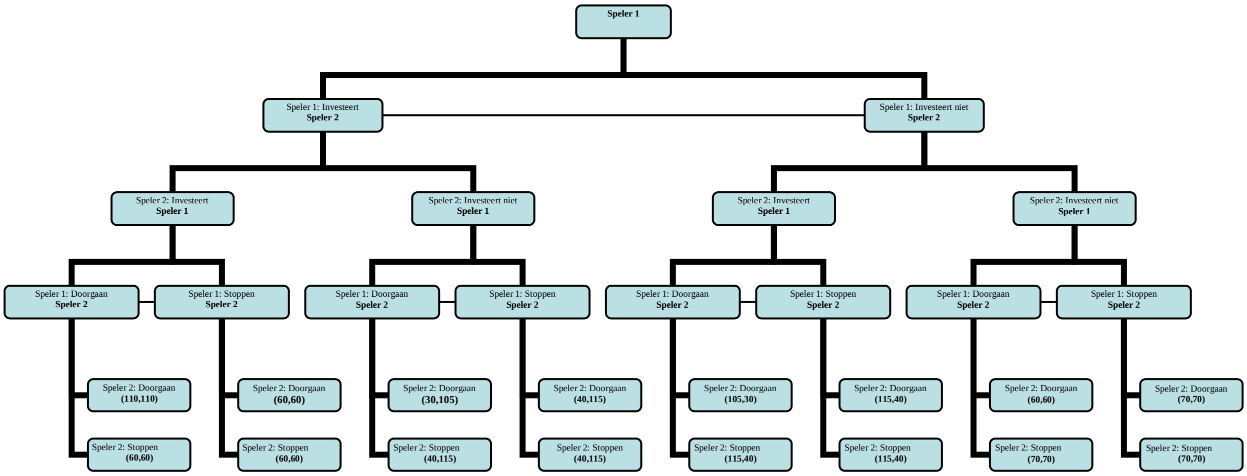
In het volgende spel zijn er twee spelers, die samen elk kunnen investeren in hun samenwerking. Na één periode kunnen zij besluiten door te gaan met hun samenwerking of om deze te verbreken. Als één van beide spelers de samenwerking wil verbreken, dan wordt deze verbroken. Alle vier de keuzes die gemaakt worden hebben invloed op de uitbetalingen aan het eind van het spel.

De uitbetaling per speler is als volgt opgebouwd:

Voor de eerste periode	
40	Altijd
-30	als er geïnvesteerd is door de speler
20	als er geïnvesteerd is door de andere speler
Voor de tweede periode	
30	als ze niet samen blijven werken
20	als ze samen blijven werken
25	als de andere speler geïnvesteerd heeft
35	als beide spelers geïnvesteerd hebben en ze samen blijven werken

Tabel 4: Uitbetalingen bij het voorbeeld

Als je dit spel als boom weergeeft dan krijg je het volgende:

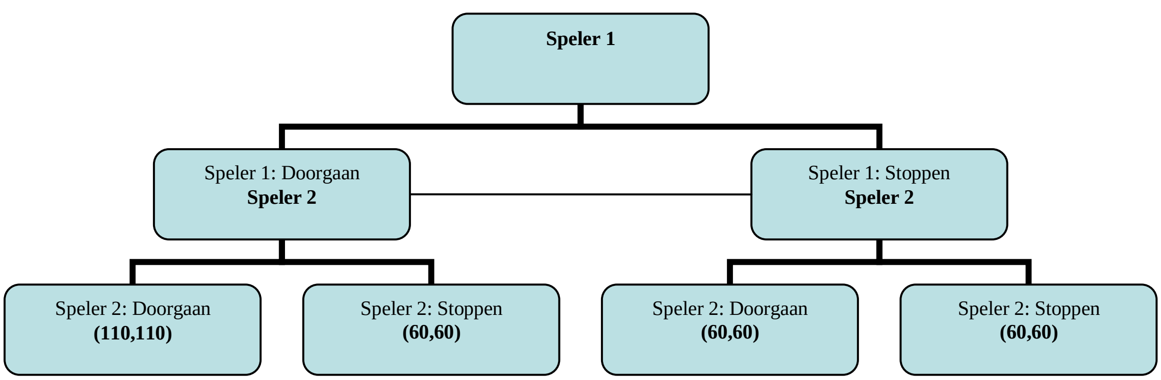


Figuur 3: Spelboom bij het voorbeeld

Voor het overzicht zijn de laatste vertakkingen verticaal getekend. Het spel bestaat uit twee delen: eerst wordt er beslist of er geïnvesteerd wordt en nadat deze beslissingen kenbaar gemaakt zijn wordt er besloten of de samenwerking voorgezet wordt. De keuze om door te gaan of om te stoppen wordt beïnvloed door de gemaakte keuzes met betrekking tot investeren of niet investeren.

Er zijn vier subspellen te herkennen, namelijk de keuzes met betrekking tot doorgaan of stoppen bij de vier verschillende mogelijkheden van investeren. Door eerst deze subspellen te bekijken en op te lossen kun je de gevolgen van de eerste keuzes beter overzien.

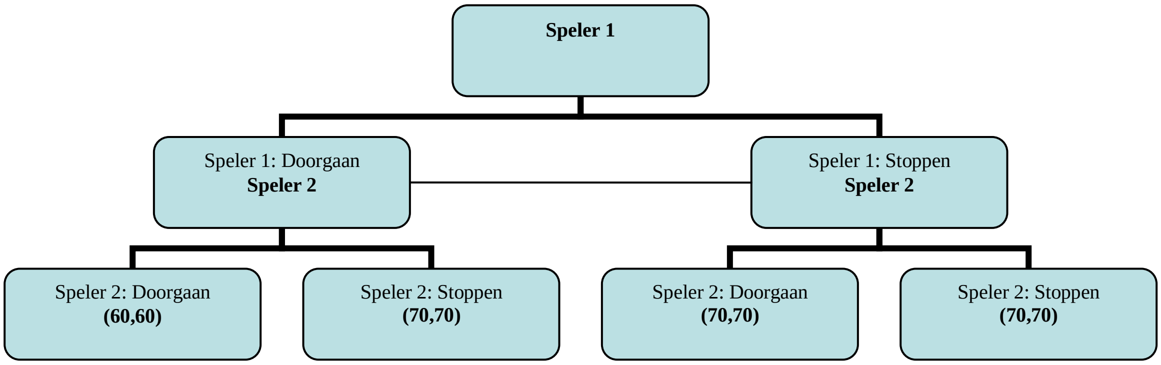
Het eerste subspel, waar beide spelers geïnvesteerd hebben, ziet er als volgt uit:



Figuur 4: Spelboom bij het eerste subspel

Als beide spelers geïnvesteerd hebben, dan is doorgaan voor beide spelers de optie met de meeste opbrengst mogelijkheden, zonder risico op een lagere opbrengst. Deze dominante strategie leidt tot de Pareto-efficiënte uitkomst (*doorgaan, doorgaan*) met uitbetaling (110, 110).

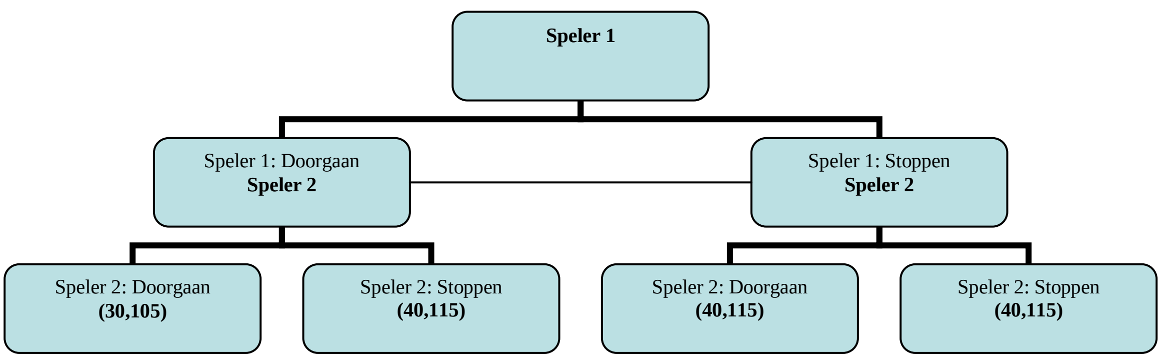
Kijken we nu naar de situatie dat geen van de spelers geïnvesteerd heeft, dan krijgen we het volgende subspel (het vierde):



Figuur 5: Spelboom bij het vierde subspel

Ook nu is er een dominante strategie, welke leidt tot de eveneens Pareto-efficiënte uitkomst (*stoppen, stoppen*) met uitbetaling (70, 70).

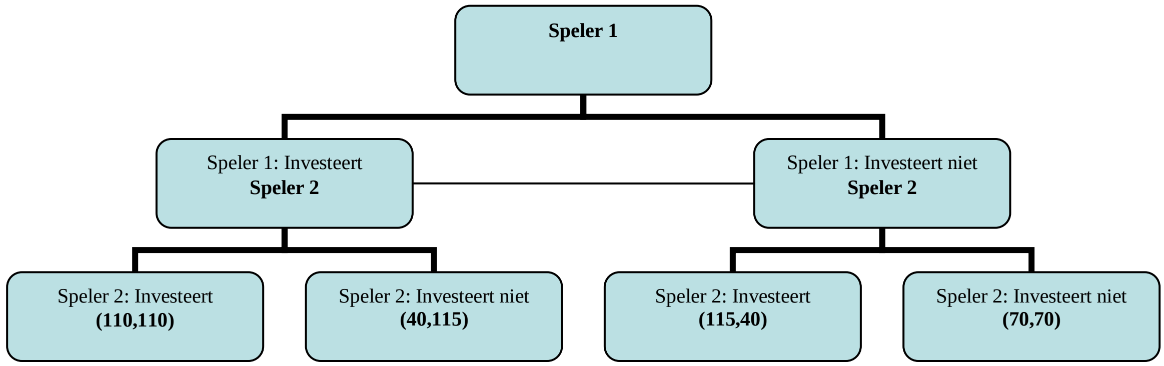
Nu de twee iets lastigere subspelen waarbij één van beide spelers geïnvesteerd heeft en de andere niet. Deze twee situaties zijn symmetrisch. Voor het geval dat speler 1 geïnvesteerd heeft ziet het (tweede) subspel er als volgt uit:



Figuur 6: Spelboom bij het tweede subspel

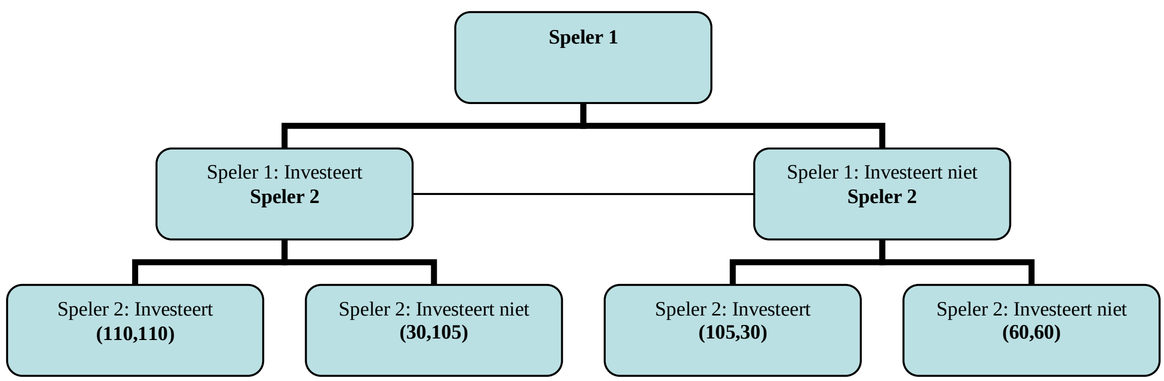
Dit subspel heeft ook een dominante strategie, namelijk stoppen. De uitbetaling is dan (40, 115). In het omgekeerde geval waarbij speler 2 geïnvesteerd heeft is de uitbetaling (115, 40).

Met de uitkomsten van de subspellen kun je het volledige spel reduceren tot het volgende:



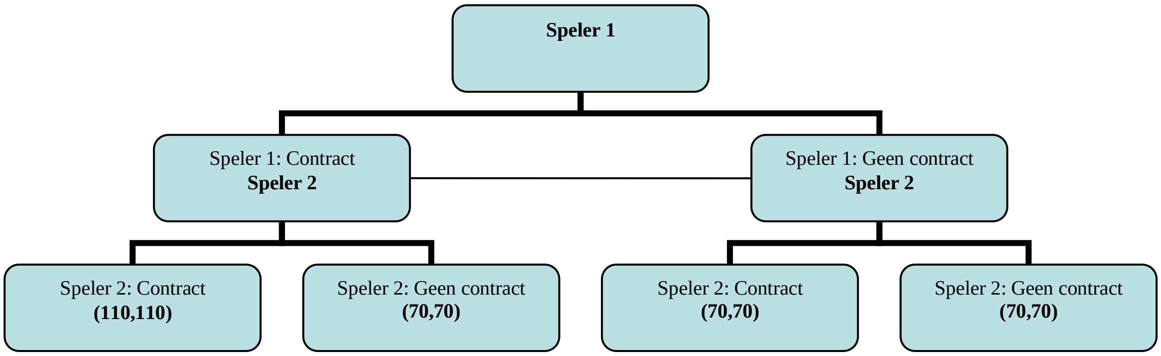
Figuur 7: Spelboom bij het gereduceerde volledige spel

Nu is eenvoudig in te zien dat niet investeren de dominante strategie is, waardoor in het volledige spel niet geïnvesteerd wordt en de samenwerking wordt verbroken. De uitbetaling is dan (70, 70). Spreken beide spelers nu van te voren af dat zij door zullen gaan en is deze afspraak bindend. Ze sluiten dus een contract af. Dan verandert de situatie, in de verschillende subspellen zijn bepaalde keuzes uitgesloten, in het bijzonder de keuzes om te stoppen. Het gereduceerde spel ziet er dan als volgt uit:



Figuur 8: Spelboom bij het gereduceerde volledige spel met contract

Nu is de dominante strategie investeren en zal de uitbetaling (110,110) zijn. Wat overblijft is het nemen van de beslissing of er een contract gesloten wordt. Dit is een beslissing de gezamenlijk genomen wordt. Ook deze beslissing kun je weer in een boom weergeven. Deze ziet er als volgt uit:



Figuur 9: Spelboom bij de extra beslissing

Ook hier is er weer een dominante strategie. Deze leidt tot de uitbetaling van (110,110). De optie om (bindende) contracten af te sluiten leidt dus tot een voor beide spelers gunstiger resultaat. Als het contract niet bindend is dan zit je in de zelfde situatie als dat er geen contract is. Alleen het vertrouwen dat beide spelers in elkaar hebben kan de spelers doen besluiten het spel voort te zetten alsof er een bindend contract is.

Dit voorbeeld dient te illustratie van verschillende elementen in een spel en van hoe er geredeneerd moet worden. Bij spelen voor meer personen worden de bomen groter, maar hetzelfde principe blijft overeind.

2.10 Eerlijkheid

Wat kunnen we nu zeggen over de eerlijkheid van een spel? Dat hangt erg af van het type spel. In een non-constant sum spel is het over het algemeen erg moeilijk om iets over eerlijkheid te zeggen. De verdeling van de uitbetalingen speelt hier een grote rol bij. Een verdeling waarbij alle spelers winst maken lijkt per definitie eerlijker dan één waarbij er een of meerdere spelers verlies maken. Echter kan zo’n verdeling voor een of meerdere spelers een stuk ongunstiger zijn dan enkele andere. De verdeling met de hoogste totale uitbetaling kan bij voorbeeld alles aan één speler geven, terwijl andere spelers zelfs nog wat verlies lijden. Daarnaast kan er een verdeling zijn die alle spelers een minimale winst uitkeert.

Een zero-sum spel is beter te bevatten in termen van eerlijkheid. Een non-zero-constant-sum spel kan eenvoudig getransformeerd worden naar een zero-sum spel, door de constante factor bij de uitbetalingen buiten beschouwing te laten (en gelijk over alle spelers te verdelen). Zoals reeds genoemd is, is er bij een zero-sum spel geen dominante strategie, om nu toch een strategie te bepalen moet er gekeken worden naar de gemiddelde uitbetaling over vele spellen, waarbij er tussen de strategieën gevarieerd wordt. Nu zoeken we een strategie die de minimale uitbetaling maximaliseert. Dit wordt ook wel een minimax-strategie genoemd. Intuïtief lijkt een zero-sum spel eerlijk als je iedere speler een minimax strategie heeft waarbij hij/zij gelijk speelt en dus gemiddeld alle spelers even veel winnen als dat ze verliezen.

Kijken we nu naar het matching pennies spel, dan kunnen we een strategie zoeken die de verwachte minimale uitbetaling maximaliseert. Daarvoor moeten we eerst de mogelijke pure strategieën onderscheiden. Een pure strategie is een strategie die in dezelfde situatie altijd dezelfde keuze oplevert. Bij matching pennies heeft iedere speler telkens de keuze tussen kop en munt. De mogelijke pure strategieën zijn nu altijd voor kop te gaan en altijd voor munt te gaan. Als je altijd voor kop gaat, dan valt dat de andere speler op en deze zal zijn strategie aanpassen, zodat je daarna altijd verliest. Nu moet je zelf je strategie aanpassen, en dus afwijken van de pure strategie. Nadat je strategie is aangepast, zal je tegenstander zijn strategie weer aanpassen. Enzovoorts. Op een gegeven moment herken je het aanpassingspatroon en ga je daar weer rekening mee houden. Op deze manier zullen beide spelers ongeveer even vaak winnen. Om het jezelf wat gemakkelijker te maken kun je je keuze ook door het lot laten bepalen, je tegenstander zal het erg lastig hebben daar een patroon in te herkennen.

Nu moet er nog gezocht worden naar de kans waarmee je voor kop gaat ‘kiezen’. Als je deze kans gelijk neemt aan ½ dan maakt het niet uit wat de tegenstander kiest, je verwachtte uitbetaling is dan 0. Dit gaat op voor beide spelers. Wanneer je tegenstander deze strategie toepast, zul je ook nooit meer aan uitbetalingen kunnen verwachtten dan 0. Bij elke andere verdeling tussen kop en munt is het mogelijk dat de tegenstander een gunstiger resultaat behaalt. Als je met kans p kop kiest, dan kan de tegenstander met een van de pure strategieën een uitbetaling realiseren van $p-(1-p) = 2p-1$ *als* $p > ½$ of $(1-p)-p = 1-2p$ *als* $p < ½$. Aangezien een winst van je tegenstander een verlies voor jou betekent, is $p = ½$ de meest gunstige strategie, de minimale uitbetaling is gemaximaliseerd. Zo een strategie noem je een *minimax* strategie.

Het aan het lot overlaten van de strategie, of variëren daarvan, heeft geen zin als de tegenstander zijn volgende beslissing pas hoeft te maken nadat je strategie bekend gemaakt is. Het variëren tussen twee of meer strategieën noemt men een gemengde strategie. Een spel is eindig als er een eindig aantal pure strategieën zijn voor alle spelers.

De Minimax stelling

Voor elk eindig zero-sum spel voor twee spelers is er:

a) *een waarde* V *van het spel*
b) *een gemengde strategie voor speler 1, die een gemiddelde winst voor speler 1 garandeert van* V*, ongeacht de strategie van speler 2*
c) *een gemengde strategie voor speler 2, die een gemiddeld verlies voor speler 2 van ten hoogste* V *garandeert, ongeacht de strategie van speler 1.*

Als beide spelers een minimax strategie hanteren, dan garandeert speler 1 voor speler 2 een verlies van gemiddeld tenminste V, terwijl speler 2 een verlies van gemiddeld ten hoogste V realiseert. Als logisch gevolg zal het verlies voor speler 2 en dus de winst voor speler 1 dan gemiddeld gelijk zijn aan V. Dit is de natuurlijke uitkomst van het spel. Alleen als een van beide spelers een niet optimale strategie hanteert, dan behaalt de andere speler een voor hem/haar gunstiger resultaat.

Is de waarde van het spel V nu gelijk aan 0, dan is het spel eerlijk. Dit houdt in dat op langere termijn geen van beide spelers meer winst behaalt, dan dat hij/zij verlies behaalt, als beide spelers optimaal spelen.

2.11 Meerpersoons spellen

De minimax-stelling gaat over spellen met twee spelers. De vraag is nu over deze stelling ook toepasbaar is voor spellen voor meer dan twee spelers. Door nu de spelers te verdelen over twee teams die tegen elkaar spelen kun je de stelling weer toepassen. Vervolgens kijken we naar de bijzondere verdelingen, waarbij team 1 uit één speler bestaat en team 2 uit alle andere spelers. Als de waarde V van het spel nu voor elke speler tegen de rest van de spelers, zelfs als alle andere spelers samenspannen 0 is, dan is het spel eerlijk. In dat geval is het spel zelfs absoluut eerlijk.

Er zullen niet veel meerspersoonsspellen absoluut eerlijk zijn. Het kan bijvoorbeeld goed mogelijk zijn dat alle spelers (op één na) samenwerken tegen één speler. Deze ene speler zal verliezen. De overige spelers hebben onderling nu een ander spel dat opgelost moet worden. Als dit onderlinge spel nu eerlijk is voor alle mogelijke winnende samenwerkingsverbanden tussen de spelers, dan is het spel eerlijk. Het is ook mogelijk dat er twee teams ontstaan die elkaar proberen uit te schakelen, waarbij het winnende team de winst onderling betwist. De samenzwerende spelers spelen onderling een non-constant-sum spel waarbij het slachtoffer de winst moet bekostigen. Hierdoor is deze methode het best geschikt voor spellen waarbij de uitbetaling rechtevenredig is met de positie op een ranglijst.

Door de minimax-stelling aan te passen is deze ook toepasbaar voor meerpersoons spellen. Je moet niet spreken over ‘ongeacht welke strategie de tegenstanders gebruiken’, maar als de tegenstanders ‘hun beste individuele strategie gebruiken.’ Dit laatste is hun eigen minimax-strategie (tegen een coalitie van alle andere spelers).

De aangepaste Minimax stelling
Voor elk eindig zero-sum spel is er voor elke speler i*:*

a) *een waarde* $\mathrm{V_i}^*$ *van het spel*
b) *een gemengde strategie, die een gemiddelde winst voor die speler garandeert van* $\mathrm{V_i}^*$*, als de andere spelers met een minimax strategie tegen alle andere spelers spelen*
c) *een gemengde strategie, die een gemiddeld verlies voor die speler van ten hoogste* $\mathrm{V_i}^*$ *garandeert, als de andere spelers met een minimax strategie tegen alle andere spelers spelen.*

Als nu de waarde van het spel V_i^* voor iedere speler gelijk is aan 0, dan is het spel eerlijk.

Er zijn ook andere varianten mogelijk. Je kunt de waarde per speler bepalen tegen coalities van alle andere spelers. Als de waarde dan voor elke speler gelijk is kun je het spel eerlijk noemen. Een absoluut eerlijk spel heeft dan als waarde 0.

In meerpersoonsspellen draait het juist om het vormen van de teams, ook wel coalities genoemd. Deze spellen laat ik verder buiten beschouwing.

2.12 Toeval

Soms hangt een spel af van het toeval. In dat geval kun je een fictieve extra speler toevoegen, die al zijn beslissingen altijd willekeurig, maar volgens een bepaalde kansverdeling neemt. De andere spelers kennen deze kansverdeling en kunnen daar bij het bepalen van hun strategie rekening mee houden. Deze speler zal nooit een uitbetaling ontvangen. Al kun je deze speler, net als bij een non-constant-sum spel ook zien als het spel zelf. In de formele notatie wordt deze speler vaak N (nature) genoemd.

De minimax-stelling gaat zelfs op voor spellen met een toevalselement. De spelers kunnen niet samenwerken met het spel, waardoor een tweepersoons spel dat eerlijk is ook absoluut eerlijk moet zijn, andersom gaat dat natuurlijk vanzelf op.

3 Classificatie van spellen

De betekenis volgens de Van Dale van het woord spel niet helemaal toereikend voor de speltheorie. De definitie van een spel in speltheoretische context is:

Spel: Geheel van vaste regels met elementen als inzicht, kans, opties en uitkomsten.

Het spel is dus de omschrijving van de opties die de spelers van het spel hebben en een beschrijving van de eindstanden van het spel. Dit is meestal een zeer algemene beschrijving. Zo wordt van het schaakspel voor elk van de verschillende stukken de individuele opties beschreven, er wordt beschreven wanneer het spel afgelopen is en dat elke speler als die aan de beurt is een stuk moet verplaatsen (volgens de eerder genoemde regels). Al met al passen deze regels op één á twee bladzijden, zou je voor alle bordstanden afzonderlijk de opties willen opnoemen, dan kost dit heel wat meer ruimte.

Nu zijn er verschillende soorten spellen, deze soorten hangen samen met de belangrijkste elementen in de regels van het spel. Er zijn:

- geluksspellen
- denkspellen
- behendigheidsspellen.

Vaak zijn spellen een mengvorm, bijvoorbeeld een denkspel met een toevalselement, zoals bridge.

Ook het aantal spelers verschilt van spel tot spel. Voor het onderzoeken van een spel uit speltheoretisch oogpunt kun je onderscheid maken tussen spellen voor:

- één speler
- twee spelers
- meer dan twee spelers.

3.1 Elementen

De meeste spellen bevatten elementen uit meerdere categorieën en dat maakt het bestuderen ervan interessant en soms ingewikkeld. De categorieën zijn: geluk, strategie en behendigheid. Om een spel te kunnen ontleden in subspellen moet je eerst een beeld hebben van de verschillende elementen. Daarom is het verstandig om te kijken naar enkele pure spellen, daar mee bedoel ik dat het spel alleen bestaat uit elementen van dezelfde categorie.

3.1.1 Geluksspel: ganzenbord

Een voorbeeld van een puur geluksspel is ganzenbord. In dat spel worden alle acties bepaald door het lot. De spelers hebben geen keuzes (met uitzondering van het wel of niet meedoen) en dus ook geen invloed op het spel. Je kunt vooraf voor elke speler de kans uitrekenen dat hij/zij wint. Dit is wiskundig gezien ‘slechts’ een oefening in de waarschijnlijkheidsrekening. De spelers hebben allen dezelfde strategie: “Ik zie wel wat er gebeurt.” Deze strategie is niet te wijzigen. Doordat er geen strategie gekozen kan worden is ganzenbord vanuit speltheoretisch oogpunt niet interessant.

3.1.2 Denkspel: boter-kaas-en-eieren

Een puur denkspel, zoals boter-kaas-en-eieren, is 'op te lossen'. Alle opties voor alle spelers zijn bekend bij alle spelers. Hierdoor kun je alle mogelijke uitkomsten berekenen die nog mogelijk zijn nadat je een keuze voor een van je opties zou hebben gemaakt. Nu kun je een keuze maken die een voor jou zo gunstig mogelijk resultaat zal hebben. Zo is voor boter-kaas-en-eieren bekend dat als beide spelers optimaal spelen (en de tegenstander koste-wat-kost niet laten winnen) er altijd een gelijk spel uit zal komen (en dus volkomen zinloos is). Op deze manier is het mogelijk elk puur denkspel op te lossen en te reduceren tot 'de speler die begint die wint' of 'gelijkspel'. De meeste pure denkspellen hebben echter zoveel verschillende opties dat geen speler alle tegenzetten uit zijn hoofd zal kennen en de beslissingsboom is (zeker in het begin van het spel) zo groot dat deze niet te bevatten zijn. Hierdoor zijn de iets complexere pure denkspellen nog altijd interessant om te spelen.

3.1.3 Behendigheidsspel: kogelstoten

Een puur behendigheidsspel is bijvoorbeeld het kogelstoten uit de atletiek. De speler moet de kogel wegstoten met een zo groot mogelijke snelheid en de juiste hoek waaronder de kogel weg gestoten dient te worden. Hierbij speelt spanning een grote rol en kan de kans op een 'afzwaaier' doen besluiten op een andere (minder verre) afstand te mikken, waarbij de speler een grotere controle heeft over zijn uitvoering en de kans op een 'afzwaaier' dus kleiner is. Dit speelt met name een rol als er nog geen goede score is behaald. De 100 meter hardlopen is ook een voorbeeld van een puur behendigheidsspel. Vanuit speltheoretisch oogpunt is ook dit niet zo interessant, de strategie is altijd 'probeer zo hard als mogelijk te lopen.' Het voorbeeld van het kogelstoten wordt al iets interessanter, zeker als er een competitie element wordt toegevoegd en een tijdsdruk element.

3.1.4 Combinatiespel: darts

De meeste spellen zijn combinaties van deze categorieën. Zo is bijvoorbeeld darts naast een behendigheidsspel ook een denkspel. Als een dartsspeler het behendigheids deel volledig onder controle heeft, dan zal hij elk spel een zogenaamde negendarter gooien. Echter hebben spelers het behendigheidsgedeelte niet volledig onder controle en gaan zij rekening houden met mogelijke missers. De speler probeert de gevolgen van de meest voorkomende missers van weinig invloed te laten zijn. Bij het uitgooien, dient er een zo genaamde 'dubbel' gegooid te worden. De meest voorkomende misser is dan een enkel te gooien. Door nu met een dubbel-16 te willen eindigen, heeft de misser enkel-16 relatief weinig effect, er kan dan meteen geprobeerd worden dubbel-8 te gooien. De meest voorkomende misser is nu enkel-8, waarna dubbel-4 weer volstaat. Houdt je daarentegen een oneven aantal over, dan moet je ergens een enkel-'oneven' gooien om weer met een dubbel te kunnen eindigen. Dit kost een pijl en dat kan betekenen dat je tegenstander nog een keer extra aan de beurt komt.

Een puur spel is uit te rekenen (kansspel), op te lossen (denkspel) of wiskundig niet interessant (behendigheidsspel). Dat laatste is vanuit speltheoretisch oogpunt gezien, de fysieke techniek die tijdens het spel uitgevoerd moet worden is met behulp van wiskunde vaak prima volgens de mechanica te analyseren en te perfectioneren. Bij een kansspel kun je de verwachtte winst uitrekenen.

3.2 Aantal spelers

Bij het bestuderen van spellen heeft het aantal spelers invloed. Bij 1-persoons spellen hoeft de strategie alleen te reageren op de regels van het spel. Bij twee persoonsspellen kun je verschil maken tussen spellen waarbij er één winnaar en één verliezer is (of gelijkspel) en waarbij beide spelers gelijktijdig kunnen winnen of verliezen. Meerpersoonsspellen bieden spelers de mogelijkheid (tijdelijke) allianties te sluiten met andere spelers. Met 1-persoons spellen houdt de speltheorie zich niet zo vaak bezig.

Deze eerste aanzet tot de ontleding van spellen in verschillende elementen biedt de mogelijkheid om de bestaande speltheorie toe te gaan passen. Hiervoor moet de voor elk element uit het spel een passend stukje uit de theorie gevonden worden.

3.3 Bordstanden

Speltheorie zoekt naar de beste strategie voor iedere speler van een spel. Een strategie is een soort handleiding die precies vertelt wat een speler moet beslissen als hij/zij een bepaalde situatie tegenkomt en een beslissing moet nemen. Deze situaties komen overeen met bordstanden uit bordspellen en worden dan ook zo genoemd. Voor elke bordstand is er een optimale beslissing. Om iets over die beslissing te kunnen zeggen moeten alle opties voor die bordstand duidelijk zijn. Je moet voor elke bordstand de optimale beslissing weten. Daarom moet je ook alle mogelijke bordstanden kunnen opnoemen. Bij elke bordstand kan er een ander type spelelement overheersen.

Tevens kijkt speltheorie of met behulp van deze strategieën ook daadwerkelijk de beste oplossing behaald wordt. Indien dat niet het geval is worden er gezocht welke regels van het spel hiervoor verantwoordelijk zorgen. Ook kan er gekeken worden of de regels aangepast zouden kunnen worden, om de beperkende werking te veranderen. Over wat de beste oplossing is zullen de spelers van mening verschillen. Zo is een oplossing waarin de totale winst voor alle spelers samen gemaximaliseerd wordt volgens de spelers die dan verlies maken slechter dan de oplossingen waarin iedere speler een kleine winst maakt.

Elke mogelijke bordstand is een subspel van het volledige spel. Deze subspellen hebben vaak zelf ook weer verschillende subspellen. Bij elke bordstand moet er een beslissing genomen worden door één of meer spelers. Bij het gereduceerde subspel moet een standaardspel gevonden worden. De meest eenvoudige daarvan is de situatie waarin er één speler een beslissing moet nemen, die over alle benodigde informatie beschikt.

4 Modellering van de werkelijkheid

Spellen uit de werkelijkheid zijn vaak afhankelijk van factoren waarop de spelers geen (of weinig) invloed hebben. Deze factoren worden vaak door middel van een gelukselement in het spel opgenomen. De in het spel gebruikte kansverdeling is soms afhankelijk van de bordstand van het spel, de spelers hebben dan gezamenlijk enige invloed op de factor. Zo'n afhankelijke kansverdeling is vooraf bekend, maar niet alle relevante informatie is niet bij alle spelers beschikbaar. Hierdoor schatten zij de kansen anders in.

Van een behendigheidsspel kan het behendigheidselement vertaald worden naar een gelukselement. In dit geval is de kansverdeling niet exact te bepalen en afhankelijk van de speler. De behendigheid van de speler bepaalt de kansverdeling. Deze behendigheid is vaak afhankelijk van de conditie van de speler.

Elk spel heeft regels die bepalen welke opties de spelers hebben bij elke bordstand. De gelukselementen en de bijbehorende kansverdelingen maken deel uit van de regels. Op het moment dat de trekking gedaan wordt (of het resultaat er van bekend wordt) kan een speler er geen invloed op uitoefenen.

Gezelschapsspellen zijn kunstmatige (theoretische) spellen, waarbij de regels verzonnen zijn, maar heel precies gedefinieerd. Deze regels zijn ook bij alle spelers bekend, of zijn in ieder geval beschikbaar. Hierdoor kan er aan gezelschapsspellen gerekend worden. Bij spellen uit de werkelijkheid zijn niet alle regels precies bekend. Een ander belangrijk verschil is dat een gezelschapsspel meerdere keren gespeelt kan worden met de zelfde regels en een spel uit de werkelijkheid zelden twee maal met precies dezelfde regels gespeeld wordt.

4.1 Voorbeelden van spellen uit de werkelijkheid

Een recent voorbeeld van een "spel" uit de werkelijkheid is de veiling van de UMTS-rechten in Nederland. Met het aanbieden van deze nieuwe mobiele netwerk techniek kunnen allerlei winsten behaald worden. De spelers in de veiling kunnen elk een uiteindelijk bod uitbrengen op deelname aan de markt, door UMTS-rechten te kopen. Met behulp van speltheorie kan deze veiling geanalyseerd worden en bepaald worden welk bod er gedaan moet worden. Hierbij spelen de verwachtingen over het vervolgspel in de nieuwe markt ook een grote rol.

Vergelijkbaar is de veiling van de FM-radiofrequenties van 2003. Bij deze veiling hebben radiostations hun uitzendfrequentie verloren. Zonder zo'n frequentie kun je niet uitzenden. Als een radiostation niet kan uitzenden, dan wordt er niet zo veel reclame zendtijd verkocht. De verkoop van reclamezendtijd is een van de inkomstenposten van een radiostation. De andere inkomstenbron telefoonspelletjes werkt ook niet zonder uitzending. Dus zonder uitzending geen inkomsten en zonder inkomsten geen winst. Voor een radiostation is het dus erg belangrijk om een (goede) uitzendfrequentie te hebben. Het winnen van de veiling is dus erg belangrijk. Alle winnaars 'krijgen' een frequentie. Vooraf een goede analyse doen kan dus een heleboel geld opleveren, of zelfs het voortbestaan van het station.

De prijzenoorlog in de supermarktbranche is ook een "spel". Voordat deze oorlog uitbrak was er een evenwicht tussen de marktaandelen van de verschillende ketens. Doordat de ene supermarktketen zijn prijzen verlaagde, werd er een deel van de klanten van de andere ketens ingepikt. Deze andere ketens wilden hun klanten graag behouden en reageerden dus met prijsverlagingen. Vervolgens reageerde de eerste keten daar weer op. Al met al werden de prijzen systematisch lager. De verdeling van het totale marktaandeel over de verschillende ketens is ongeveer gelijk gebleven. Zeker als je naar een langere periode kijkt. Wat omzet betreft is iedere keten erop achteruit gegaan, ze hebben immers allemaal hun prijzen verlaagd. Door de prijzen hoog te houden, zouden ze ieder meer omzet (en dus winst) kunnen behalen. Een eenvoudig voorbeeld van een prijsstrategie probleem zie je ook vaak in speltheorieboeken staan. Op die manier wordt ook de werking van een vrije markteconomie inzichtelijk gemaakt.

4.2 Moeilijkheden bij het modelleren

Als je een spel uit de werkelijkheid wilt modelleren, zodat je de optimale strategie kunt bepalen, dan moet je eerst in kaart brengen wanneer welke spelers een beslissing moeten nemen. Ook moet duidelijk zijn welke opties de spelers hebben als zij een beslissing moeten nemen. Verder wil je weten wat elke speler wel en niet weet.

Je moet ook nagaan wat de gevolgen zijn van elk van de opties. Om nu een keuze te maken tussen de verschillende opties moet je de gevolgen tegen elkaar afwegen. Elke speler kan de algemene doelstelling op een iets andere manier interpreteren. Je moet dus om je tegenstanders te voorspellen weten hoe zij de doelstelling precies hanteren. Je kunt de verwachte winst willen maximaliseren. Stel je hebt twee opties die beide een verwachte winst van 40 opleveren, maar optie 1 geeft een winst tussen de -20 en 100, terwijl optie 2 een winst oplevert tussen de 0 en 80. *Welke optie is nu beter?*

Op deze manier moet je een beslissingsboom opstellen welke alle mogelijkheden nagaat. De uitbetalingen hangen soms af van externe factoren. Zo kan de te behalen omzet met UMTS-technologie afhangen van de economie. Als deze slecht gestemd is, dan is er minder te verdienen met een dure nieuwe technologie, dan wanneer de economie zich in een iets gunstiger klimaat bevindt. De individuele spelers hebben meestal weinig invloed over deze externe factoren. Daarom moet er een goede voorspelling gedaan worden over elk van de factoren. Om in een beslissingsboom om te gaan met dit soort factoren, moet de voorspelling geformuleerd worden als een kans verdeling.

Het vinden van zo’n kansverdeling is vaak al een studie op zich. Ook zijn de gevolgen van deze factoren ook niet precies bekent. Zo zou het spel van de prijzenoorlog als volgt gezien kunnen worden. Er zijn twee spelers. Zij kunnen elk kiezen om een prijzenoorlog te beginnen. De uitbetalingen zijn als volgt:

Speler 1 / *Speler 2*	Starten	Niet starten
Starten	(-1 , *-1*)	(-1 , *-1*)
Niet starten	(-1 , *-1*)	(0 , *0*)

Tabel 5: uitbetaling in prijzenoorlog

Zodra één van beide spelers start, moeten beide spelers aan de oorlog meedoen. Het zou logisch zijn als beide spelers ervoor zouden kiezen geen prijzenoorlog te beginnen. Dat zou een Pareto-efficiënt Nash-equilibrium zijn. Echter stel nu dat de uitbetalingen afhankelijk zijn van een externe factor. In dit model verandert alleen de uitbetaling voor het geval er geen prijzenoorlog is. Stel dat deze uitbetaling nu (2, -2) wordt, dan is het voor speler 2 in ene wel gunstig om de prijzen oorlog te starten.

Alle uitbetalingen in dit spel moeten door alle spelers voorspeld worden. Ook de gevolgen van eventuele wijzigingen in de externe factoren moeten voorspelt worden. De wijzigingen zelf moeten ook voorspeld worden. De spelers die dat het beste doen kunnen dus de beste strategie bepalen. De spelers met de beste strategie zullen meestal beter presteren dan de spelers met een minder optimale strategie. Al is dit natuurlijk relatief te opzichte van de natuurlijke uitkomst van het spel.

Wegens tijdsdruk beperkt men zich vaak tot het uitwerken van een beperkt aantal opties. Met name opties die in volgens de criteria van de onderzoeker naar een slechter lijken te leiden worden overgeslagen. Bij het uitstippelen van de optimale strategie, moet je dat gelijktijdig ook doen voor je tegenstanders. Bij het spelen van het spel blijkt vaak dat de tegenstand andere verwachtingen voor de effecten van externe factoren heeft, waardoor er andere opties gekozen zijn. Hierdoor kun je in een deel van de beslissingsboom komen dat je niet voldoende onderzocht hebt. Ook kunnen de voorspellingen van externe factoren er volledig naast gezeten hebben.

4.3 Vereenvoudigingen bij het modelleren

Al met al is het modelleren van een spel uit de werkelijkheid vaak nog een hele klus. Je moet vaak met voorspellingen werken. Soms volstaat een grove schatting van de uitbetalingen, terwijl in een ander geval de kleinste details van belang zijn om de beste strategie te vinden. Als je in het spel alleen kunt winnen of verliezen en er geen tussenweg mogelijk is, dan kunnen die details dus cruciaal zijn.

Als je bij het modelleren van een spel uit de werkelijkheid te gedetailleerd te werk wilt gaan, kost het ten eerste te veel moeite (en tijd) om alle details goed in kaart te brengen en ten tweede wordt het spel dan te complex om nog door te rekenen. Over die complexiteit staat in het volgende hoofdstuk meer. Vaak wordt er gebruik gemaakt van voorspellingen van anderen, zoals bijvoorbeeld het Centraal Plan Bureau (CPB). Erg prettig is dat de tegenstanders dit ook vaak doen.

Een andere manier om het modelleren te vereenvoudigen is het aantal opties te beperken. Zo kun je als je verwacht met een investering 100 te kunnen verdienen het te investeren bedrag bij een veiling bijvoorbeeld opdelen in vier categorieën. Tussen 0 en 75, tussen 75 en 100, tussen 100 en 110 en boven de 110. Als de tegenstander zijn/haar beslissingen af kan laten hangen van die van jou heeft die weer een andere schaal verdeling. Als jij minder dan 50 wilt investeren, dan komt hij/zij met een tegenbod van 60, zat jij tussen de 50 en 80, dan volgt een bod van 100 zat je tussen de 80 en de 115, dan volgt 116 en zat je boven de 115, dan wordt er gepast. Nu heb je al 7 categorieën en dus 7 opties. Zelfs met een vereenvoudiging wordt het al redelijk complex.

Zoals reeds genoemd zijn gezelschapsspellen al duidelijk gedefinieerd, daarom worden in het vervolg van dit werkstuk enkele bekende gezelschapsspellen gebruikt. Er wordt dan ook aangenomen dat de regels van deze spellen bekend zijn. Ook zijn deze regels zodanig opgesteld dat deze maar op één manier geïnterpreteerd kunnen worden.

5 Complexiteit en intuïtieve benadering

Een bordstelling omvat alle informatie die de situatie van het spel omschrijven, inclusief de beschikbaarheid van deze informatie aan de spelers. Er wordt bijvoorbeeld wel eens gebruik gemaakt van kaarten. Als deze kaarten in de hand gehouden worden, is bij de andere spelers meestal wel bekent hoeveel kaarten een speler heeft, maar niet welke. Voor het verdere verloop van het spel maakt het wel uit welke kaarten de spelers hebben. Een ander element waaruit een bordstelling kan bestaan is een vorm van valuta.

Per bordstelling is er één speler of een groep van spelers aan zet. Deze speler(s) moeten nu een beslissing nemen. Zij hebben daarvoor de keuze uit een beperkt aantal opties. Deze opties verschillen vaak per bordstelling.

Vermoeden: Een reactief spel (met flexibele strategie) zonder gelukselementen is altijd op te lossen.

De strategie wordt flexibel genoemd, omdat een speler zijn keuze af kan laten hangen van de zet van de tegenstander(s). Speler twee hoeft niet te bepalen wat hij/zij doet, voordat speler 1 zijn/haar keuze bekend gemaakt heeft.

Voor elke mogelijke bordstelling moet de beste keuze bepaald worden. Deze strategie kan vervolgens geleerd worden, waardoor er een regel ontstaat als ‘ik begin, dus ik win’ of dat het altijd gelijkspel wordt. Zolang deze oplossing nog niet gevonden is blijken spelers intuïtief naar de beste oplossing te zoeken.

Bij spellen met een toevalselement kan er op vergelijkbare manier een optimale strategie gevonden worden. Deze maximaliseert de verwachte winst. Deze strategie garandeert geen winst. Hierdoor is het voor spelers die niet volgens de optimale strategie spelen toch mogelijk te winnen. Dit is een eigenschap die gezelschapsspellen speelbaar houdt. Voor spellen uit de werkelijkheid kan het sommige spelers doen besluiten mee te doen aan een spel, ondanks dat hun winstkansen niet voordelig zijn. Zodra andere spelers niet gebruik maken van een optimale strategie kunnen de winstkansen immers stijgen.

De volledige strategie bestaat, zoals reeds gezegd, uit de ‘beste’ zet voor elke bordstelling. Per bordstelling moet er een evaluatie gemaakt worden van de verschillende opties die de speler heeft. In die evaluatie moeten alle mogelijke ‘antwoorden’ van de tegenstander(s) afgewogen worden. Dit doe je doormiddel van de spelboom. Op deze manier ontstaat er voor elke bordstelling een subspel, dat opgelost dient te worden. Sommige van deze subspellen leiden met één zet tot een eindsituatie, waarmee het resultaat bekend is, andere vergen wat meer werk. Er zijn ook spellen, waarbij een bepaalde bordstelling een tweede keer kan voorkomen. Als dat in de spelboom voorkomt, dan heb je ook een eindsituatie bereikt, immers als de beste strategie van een bordstelling naar zichzelf leidt, dan zal dit zich blijven herhalen. Wat deze eindsituatie betekent, hangt af van het spel.

Door nu eerst de boom in zijn geheel op te bouwen en vervolgens elk subspel vanaf de uiteinden van de takken op te lossen kun je de beste strategie vinden. Dit is geen geringe klus. De omvang van de boom hangt af van het aantal mogelijke bordstellingen dat een spel heeft en van het aantal opties dat een speler heeft bij die bordstellingen. De combinatie van deze twee kwantitatieve eigenschappen van een spel geeft een idee van de complexiteit van dat spel. Ook moet het spel eindig zijn, of eindig gemaakt worden. Dit laatste kun je doen door bijvoorbeeld bij het herhalen van een bordstand het spel te beëindigen.

Met behulp van computers kan voor elk spel de boom opgezet worden. Nu kan symmetrie een rol spelen om een flink aantal bordstellingen als gelijkwaardig te beschouwen. Er is dan wel een algoritme nodig om deze symmetrie te herkennen. Hierbij moet er een afweging worden gemaakt tussen de tijdskosten voor het herkennen van de symmetrie en de tijdwinst door het beperken van het aantal mogelijkheden.

De enige beperking om van een willekeurig reactief spel zonder gelukselementen niet met deze methode op te lossen is de huidige rekenkracht van de computers.

5.1 Complexiteit

Een relatief beperkt spel als schaken dat zich af speelt op een bord met 64 vakjes en beide spelers 16 speelstukken hebben is al dermate complex dat het doorrekenen van alle bordstellingen niet binnen een redelijke tijd kan gebeuren. In ieder geval niet met de huidige apparatuur. Daar komt bij dat de database met de strategie dusdanig groot wordt dat een mens deze niet geheel kan onthouden.

Ter illustratie schat ik het aantal opties na enkele zetten. Elke speler heeft 20 opties voor zijn/haar openingszet, waardoor er na twee zetten al 400 verschillende mogelijke bordstellingen mogelijk zijn. Voor zet twee heeft wit weer minstens 19 verschillende opties en voor zwart blijven er minstens 19 opties over voor zet twee. Nadat beide spelers ieder twee zetten gedaan hebben zijn er dus minstens 144400 combinaties van zetten geweest. Één daarvan heeft reeds geleid tot een overwinning van zwart en vele combinaties leiden tot een gelijke bordstelling. In eerste instantie explodeert het aantal paden in de boom dus enorm.

De complexiteit van een spel hangt dus af van het aantal opties dat spelers hebben en het aantal verschillende bordstellingen dat het spel heeft. Het totaal aantal opties dat alle spelers bij elkaar hebben in alle bordstellingen is een grootheid die een indicatie van de complexiteit geeft.

5.2 Intuïtieve benadering

Een spel met hoge complexiteit is op te lossen, maar niet meer door de mens in een beslissingsboom te bevatten. De huidige technologie is ook nog te beperkt om zeer complexe spellen binnen afzienbare tijd door te rekenen. Deze spelen blijven voor de spelers interessant. Er worden andere manieren gezocht op tot de beste strategie te komen.

5.2.1 Schaken

Schakers beoordelen de bordstellingen op een meer intuïtieve manier. Zij ‘denken’ in lijnen die al dan niet beheerst worden door een van beide spelers. Dit gecombineerd met ervaringskennis over het zogenaamde eindspel en kennis over de kwaliteiten van de tegenstander laat de schaker een toekomstige bordstelling waarderen. En daarmee krijgen de opties die hij/zij heeft een waarde, waardoor er een aantal opties als ‘niet-nuttig’ gekwalificeerd worden.

Daarnaast kennen schakers aan bepaalde stukken op het bord een taak toe. Deze taak mag eigenlijk niet verwaarloosd worden, hierdoor kan het stuk niet verplaatst worden en zijn er dus minder opties. Verder kan er een zet waarmee een stuk wordt opgeofferd om zodoende de stelling van de tegenstander te verzwakken (volgens de speler) of een overwinning te behalen gedaan worden. Deze zet moet wel binnen enkele zetten uitbetalen.

Met name bij analyses van een schaakspel wordt er een spelboom opgezet, waarbij enkel op, in de ogen van de analist, cruciale momenten een of twee alternatieve zetten worden uitgewerkt. Deze alternatieven eindigen vaak na drie of vier zetten van beide spelers. De dan in het alternatief ontstane bordstelling wordt van een waardeoordeel voorzien in vergelijking met het werkelijke verloop van de partij. Soms vindt men dat de speler de juiste beslissing heeft genomen, soms concludeert men dat de speler iets over het hoofd gezien heeft.

Tijdens het spelen worden er ook enkele van deze spelbomen een aantal zetten uitgewerkt. Hoe diep die uitwerking is hangt erg af van de speler, zijn ervaring, de tegenstander, de bordstelling en de resterende denktijd. Deze spelbomen zijn ook weer verre van compleet uitgewerkt.

Bij de eerste zet wordt meestal vooraf gekozen voor een zet. Ook de volgende zetten zijn vooraf al gekozen. Voordat ze gedaan worden wordt wel de zet van de tegenstander beoordeeld. De eerste zetten worden gekozen met een stelling in gedachte die de speler na een aantal zetten wil hebben. Deze stelling is op basis van de intuïtieve waardering gekozen. Dit plan van aanpak wordt door beide spelers gebruikt. Daarna ontstaat er een fase in het spel waarbij de intuïtieve waarderingen bij elke zet een grote rol spelen. Tegen het einde van het spel wordt het aantal opties dat de spelers hebben steeds kleiner. Dan wordt de spel boom verder uitgewerkt. Ook wordt erg veel gebruik gemaakt van uit ervaring geleerde trucjes, welke het resultaat zijn van een eerdere inspanning om het spel op te lossen. (De speler heeft een stukje van de totale strategie uit zijn hoofd geleerd.)

Wanneer het spel van de openingsfase overgaat naar het midden spel en wanneer het eindspel werkelijk begint is niet precies te zeggen. Ook de gebruikte methodes om tot de beste zet te komen gaan geleidelijk over van het vooraf getrokken plan naar de intuïtieve benadering en tenslotte een beslissingsboom.

5.2.2 Go

Het spel go kent enkele simpele regels. Om de beurt plaatsen de spelers een steen op een leeg kruispunt op het bord of passen zij. Nadat er een steen geplaatst is wordt gekeken of er nu stenen gevangen kunnen worden. Zodra beide spelers achter elkaar passen, dan is het spel ten einde en wordt de score bepaald. Eerst worden alle stenen die zonder meer gevangen kunnen worden van het bord genomen. Daarna telt iedere speler het aantal vrije kruisingen dat door stenen van zijn kleur omsingeld is. Daarbij word het aantal van de ander gevangen stenen bij opgeteld. De speler met het meeste aantal punten heeft gewonnen. Er is nog een regel die voorkomt dat dezelfde stelling te snel weer terug komt. Het spelbord heeft 19 horizontale en 19 verticale lijnen.

Om het spel voor beginners overzichtelijk te houden kan het ook op een kleiner bord gespeeld worden. Meestal is een beginnersbord 9x9 groot. Nog kleinere borden zijn ook mogelijk. In het volgende hoofdstuk werk ik de spelboom uit voor een 1x1 bord, een 2x2 bord en een 3x3 bord.

Op het volledige bord (19x19) heeft zwart 55 verschillende mogelijkheden om zijn eerste steen te plaatsen, de overige 306 plaatsen komen logischer wijs overeen met een van die 55 plaatsen. Bij go begint zwart altijd. Zwart kan uiteraard ook passen. Zwart heeft dus 56 opties voor zijn eerste zet. Wit heeft afhankelijk van wat zwart gedaan heeft 55, 181,361 of 56 opties voor zijn eerste zet. Bij elkaar opgeteld zijn er nu 17985 verschillende bordstanden mogelijk nadat beide spelers één zet hebben gedaan. In totaal zijn er 3^{361} ($\approx 1{,}74*10^{172}$) verschillende bordstanden mogelijk. Omdat een aantal van deze bordstanden speltechnisch niet mogelijk zijn vallen er flink wat af, maar het blijft een zeer groot aantal. Verder speelt het aantal stenen dat reeds gevangen is ook een rol. Het verschil tussen het aantal gevangen zwarte stenen en het aantal gevangen witte stenen is voldoende. Deze score over de gevangen stenen maakt het aantal bordstanden nog groter.

Ook go is dus (nog) niet met de huidige technologie in een te overziene periode door te rekenen. Vroeger (go bestond al voordat onze jaartelling begon) had men al helemaal geen technologische hulp bij het doorrekenen van het spel. Daarom zijn er ook voor go een flinke hoeveelheid alternatieve oplossingsideeën bedacht.

Een van de concepten bij go is de keten. Verder kunnen ketens als levend of dood beschouwd worden. Een dode keten kan zonder meer gevangen worden, terwijl een levende keten niet gevangen kan worden. Één van de kenmerken van een levende keten is dat deze twee ogen heeft. Een oog is een omsingeld vrij veld. Je hebt er daar twee van nodig, omdat de tegenstander nooit twee ogen tegelijk kan vullen. Vult hij een oog met een steen, dan is deze steen meteen gevangen. Vult hij echter het oog van een keten, die maar een oog heeft terwijl de keten verder in zijn geheel omsingeld is, dan wordt de gehele keten gevangen.

Soms lijkt het dat een keten één of meer ogen heeft, terwijl dat niet waar hoeft te zijn. Men spreekt dan van valse ogen. Het is verder zaak om in te zien of een oog opgedeeld kan worden in twee ogen of niet. Ook is de rand van het bord een bondgenoot, waar gebruik van gemaakt kan worden. Uit ervaring leert een speler hoeveel ruimte er nodig is om een keten in leven te houden. Deze wijsheid wordt zowel aanvallend als verdedigend gebruikt.

Uit ervaring is gebleken dat beginnen een voordeel lijkt. Spelers die begonnen bleken vaker te winnen. Om dit voordeel te compenseren zijn wordt er aan wit vaak 5½ punt toegekend. Uit een volledige analyse van het spel moet blijken of deze compensatie het spel echt eerlijk maakt.

6 Uitwerking van enkele voorbeelden

Nu volgt er een uitwerking van enkele spellen. Hierbij wordt de beste (optimale) strategie voor beide spelers bepaald. Als nu beide spelers deze strategie volgen, dan heeft het spel een verwachte uitbetaling. Deze uitbetaling gebeurd volgens een standaard uitbetalingtabel waarin de winnaar iets van de verliezer ontvangt. Met behulp van deze uitbetalingen kan bepaald worden of een spel eerlijk is.

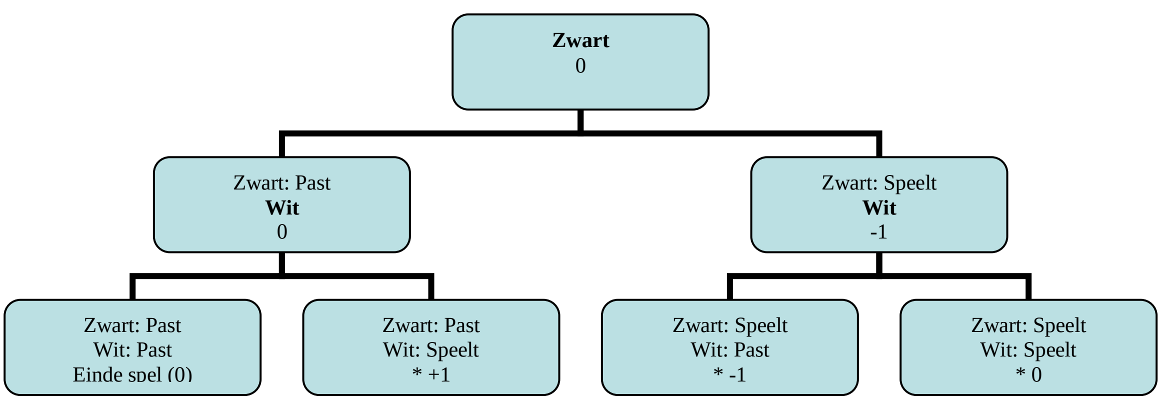
Het eerste voorbeeld is go waarvan twee varianten uitgewerkt worden, zodat meteen inzichtelijk wordt dat de complexiteit van het uitwerken flink kan toenemen. Het tweede voorbeeld is een variant op boter-kaas-en-eieren. In deze variant is er een toevalselement toegevoegd.

6.1 Go

Ter illustratie werk ik nu het spel go uit op kleine speelborden. Ik begin met een triviaal voorbeeld op een 1x1 bord. Daarna het iets minder triviale 2x2 bord. Naast een uitwerking met behulp van een speelboom geeft ik ook een kleine analyse zoals een go-speler dit vooraf en tijdens het spel zou kunnen doen. Om oneindige loops te verwerken breek ik de boom af als er een bordstelling ontstaat die al eerder heeft plaats gevonden. Het verschil in de score van gevangen stenen bepaalt in dat geval de winnaar. Een bordstelling houd ook in welke speler er aan zet is.

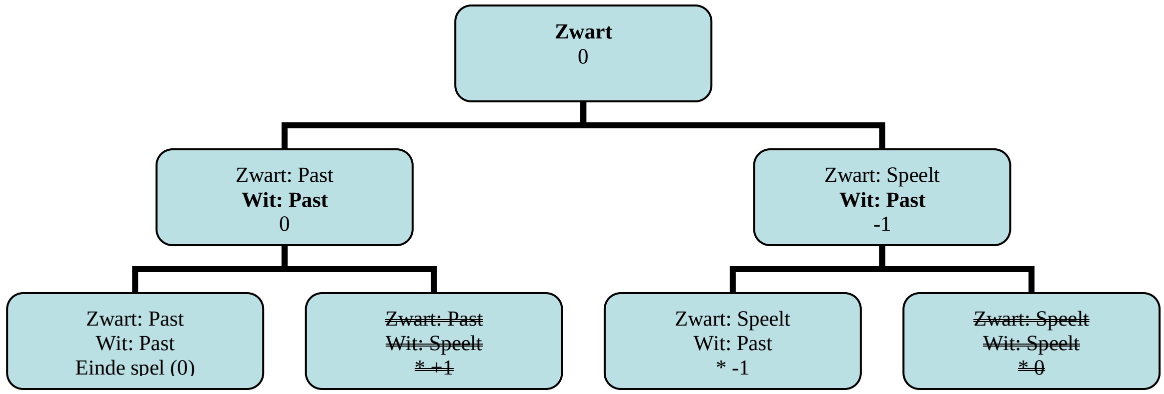
6.1.1 1x1 bord

Eerst moet bekeken worden wat er gebeurd als een speler een steen op dit bord plaatst. Zodra er een steen op dit bord ligt, dan heeft de keten geen enkele vrijheid meer en wordt dus gevangen! Het spelen van een steen leidt dus voor 1 punt van de tegen stander. Het bord blijft leeg.



Figuur 10: Spelboom bij Go op een 1x1 bord

Een blad aan deze boom dat met een * gemarkeerd is betekent ‘einde spel’ volgens de toegevoegde regel die de boom moet beperken. De score is de score van het pad, waarbij een positieve waarde op een voordeel voor zwart duidt en een negatieve waarde op een voordel voor wit. Lossen we nu de twee subspellen op dan kiest wit in beide gevallen voor passen.



Figuur 11: Spelboom bij Go op een 1x1 bord waarin de subspellen opgelost zijn

Zwart zal nu ook voor passen kiezen, het spel eindigt in een gelijkspel, geen van beide spelers heeft een steen kunnen vangen en ook geen gebied kunnen veroveren.

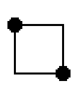
Dit is een dominante strategie. Zonder de boom te tekenen, denken beide spelers: “Als ik een steen speel, dan krijgt mijn tegenstander een punt en als ik pas niet. Passen is dus de betere optie.”

Er zijn zes theoretische bordstellingen, vier daarvan zijn speltechnisch niet mogelijk. Elke speler heeft in elke situatie ten hoogste 2 opties (spelen en passen). Dit geeft aan dat go op een 1x1 bord niet erg complex is.

Go op een 1x1 bord is eerlijk

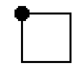
6.1.2 2x2 bord

Het 2x2 bord is al iets ingewikkelder. Eerst kijken we naar het spel met de go-theorie in gedachten. Het belangrijkste doel is het omsingelen van gebied. Daarvoor heb je op zijn minst één levende keten mogelijk. Laten we eens kijken of er een levende keten op het bord past.

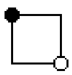


Er is een mogelijkheid voor een levende keten. Als er drie stenen in een keten liggen, dan is er nog maar één vrij veld op het bord, waardoor de keten gevangen kan worden. Liggen er twee stenen naast elkaar, dan heeft de keten één oog, dat doormiddel van offers gesloten kan worden. Nu rest de vraag of de levende keten gevormd kan worden, of dat de tegenstander dit altijd kan voorkomen.

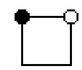
Mocht de levende keten gevormd zijn, wat moet de speler dan doen? Door een steen te spelen wordt er een oog gesloten, waardoor de keten dood is, dit is dus een verslechtering. Hierdoor zal een speler met een levende keten op een 2x2 bord passen. Zijn tegenstander zit met hetzelfde dilemma als op een 1x1 bord, “een steen spelen geeft mijn tegenstander een punt en passen niet, ik moet dus passen.” Het spel is dan afgelopen en de speler met de keten wint op het bord 2 punten. Als nu de score over de gevangen stenen nu maximaal 1 punt voordeel voor de tegenstander is, dan wint de speler met de levende keten.



Om de levende keten op te bouwen, moet er begonnen worden met het spelen van een steen. De tegenstander moet voorkomen dat de completerende steen gespeelt kan worden. Van de vier opties die wit nu heeft zijn er twee logisch gelijk. Er kan namelijk gespeelt worden op een naastgelegen kruispunt, dat zijn de twee gelijke opties, op het tegen overliggende kruispunt en er kan gepast worden. Als er gepast wordt dan kan zwart de levende keten afmaken, speelt wit op een naastgelegen kruispunt, dan kan zwart deze



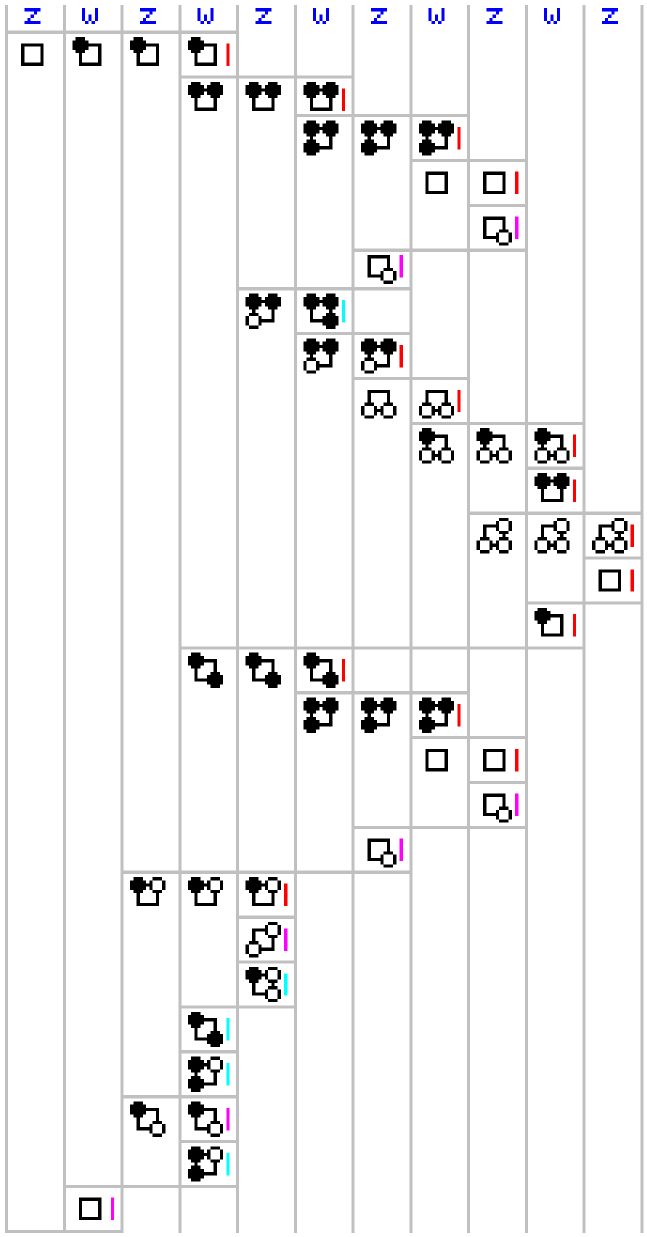
steen vangen en tegelijkertijd de keten afmaken. Alleen als wit op het tegenover liggende kruispunt speelt kan zwart de levende keten niet direct afmaken. Om vanuit deze situatie de levende keten op te bouwen moet eerst de witte steen gevangen worden. Om dat te bewerkstelligen moet er minstens één zwarte steen gespeeld worden op één van de vrije kruisingen. Die steen moet vervolgens zelf ook geslagen worden. Uiteindelijk moet je eerst weer langs de eerste stelling, welke door wit onschadelijk gemaakt kan worden. Je kunt ook nog kijken naar alle mogelijke stellingen waaruit de



levende keten gevormd kan worden. Dat zijn er twee. De eerste stelling en de stelling waarbij er twee hoeken bezet zijn door verschillende kleuren. Beide stellingen zullen niet vrijwillig door wit achtergelaten worden. De eerste stelling bevat geen witte stenen, waardoor deze alleen kan ontstaan als wit past. Dat is dus nooit gedwongen. De tweede stelling kan ook niet afgedwongen worden, als zwart aan zet is, dan heeft wit de laatste zet tot dan toe gedaan. Dat kan zijn het spelen van de ene witte steen of passen. Passen is vrijwillig en als wit de steen gespeeld heeft, dan is de vorige stelling bekend. Ook is bekend dat wit een andere zet gedaan zou hebben. Al met al kun je concluderen dat de levende keten niet zonder medewerking van je tegenstander gevormd kan worden.

Gewapend met deze kennis analyseert de go-speler de overige opties en komt tot de conclusie dat er altijd een gelijkspel uitkomt. Alle stenen op het bord kunnen gevangen worden. Om nu meer stenen te kunnen vangen dan je tegenstander, moet je er minder op het bord hebben. Om dat te bewerkstelligen moet je zo af en toe passen. Aangezien je tegenstander deze tactiek ook zal hanteren ontstaat er een gelijkspel.

De volledige spelboom van go op een 2x2 bord ziet er als volgt uit. In deze boom zijn om ruimte te besparen symmetrische spelsituaties samengevat. Ook zijn stellingen die in andere takken voorkomen als eindpunt gemarkeerd. Een symmetrische stelling die al uitgewerkt is wordt ook als eindpunt gemarkeerd. De boom is op een alternatieve wijze getekend, omdat dit het tekenen een stuk eenvoudiger maakt. Boven elke kolom staat welke speler aan zet is. Merk op dat als bij twee stellingen alle zwarte stenen vervangen worden door witte en alle (van oorsprong) witte worden vervangen door zwarte en ook de speler die aan zet is wisselt, je twee symmetrische stellingen hebt.



Figuur 12: Spelboom bij Go op een 2x2 bord

Er zijn nu 27 eindstellingen. Van elk van deze eindstellingen moet de uitslag bepaald worden. De stellingen zijn ter referentie genummerd van boven naar beneden 1 t/m 27.

Nr.	Gebied zwart	Gebied wit	Gevangen door zwart	Gevangen door wit	Voordeel
1	0	0	0	1	Wit
2	0	0	0	2	Wit
3	0	0	0	3	Wit
4	0	0	0	0	Geen
5	0	0	1	0	Zwart
6	0	0	1	0	Zwart
7	0	0	0	3	Wit
8	0	0	1	2	Wit
9	0	0	2	0	Zwart
10	0	0	2	1	Zwart
11	0	0	0	2	Wit
12	0	0	3	0	Zwart
13	0	0	0	0	Geen
14	0	0	0	1	Wit
15	2	0	0	0	Zwart
16	0	0	0	3	Wit
17	0	0	0	0	Geen
18	0	0	1	0	Zwart
19	0	0	1	0	Zwart
20	0	0	1	1	Geen
21	0	2	0	0	Wit
22	0	0	2	1	Zwart
23	2	0	0	0	Zwart
24	0	0	1	2	Wit
25	0	0	1	1	Geen
26	0	0	1	2	Wit
27	0	0	0	0	Geen

Tabel 6: Resultaten bij de boom voor go op een 2x2 bord

Tijdens het spelverloop worden er ook enkele stenen gevangen dit is niet mee genomen in de tabel.

Nu moeten we van ‘achteraf’ de keuzes van de spelers bepalen. Deze resultaten staan in de volgende tabel. De beslissingen hebben een nummering die overeenkomt met de regel waarop deze in de boom staat en het beurt nummer.

Zo begin je met beslissing 12,10. Wit is aan zet en kan keuzen tussen een eindstand met voordeel 3 voor zwart of vier stenen laten vangen en een eindstand met geen voordeel voor beide spelers. Wit kiest dan voor de eindstand met 3 punten voordeel voor zwart.

Regel	Beurt	Keuze (eindsituatie)
12	10	Passen (12)
12	9	Passen (12)
10	9	Passen (10)
10	8	Passen (10)
9	7	Passen (9)
8	6	Passen (8)
7	5	Passen (8)
8	4	Passen (4)
7	3	Passen (3)
6	3	Passen (3)
5	2	Passen (2)
4	2	Passen (2)
8	17	Passen (17)
7	16	Passen (16)
6	16	Passen (16)
5	15	Passen (15)
4	15	Passen (15)
3	1	Tegenovergestelde hoek (15)
4	20	Tegenovergestelde hoek (21)
3	20	Tegenovergestelde hoek (23)
3	25	Passen (25)
2	1	Tegenovergestelde hoek (25)
1	1	Maakt niet uit beide opties leiden tot 0-0, gelijkspel.

Tabel 7: Beslissingen op het 2x2 bord

Nu voor elke situatie bekend wat de beste keus is. In symmetrische gevallen moet de juiste situatie uitgezocht worden. Het blijkt dat in de meeste gevallen passen de beste optie is. Alleen als het bord in een hoek bezet is moet er in de tegenoverliggende hoek gespeeld worden. Op het lege bord maakt het niet uit of er een steen geplaatst wordt. Het spel eindigt als beide spelers optimaal spelen dus in een gelijkspel.

Als je nu een uitbetaling opstelt, waarbij de verliezer de winnaar iets betaalt en er bij gelijkspel niets betaald wordt, dan is het spel getransformeerd naar een zero-sum spel. De verwachte opbrengsten en verliezen zijn voor beide spelers minstens 0, waardoor het spel als eerlijk aangemerkt kan worden. Dit is ook waar op het 1x1 bord. Aangezien de optimale strategie bekend is voor beide spelers en deze indien door beide spelers wordt toegepast een gelijkspel oplevert is het spel niet zo interessant meer.

Go op een 2x2 bord is eerlijk

6.2 Boter-kaas-en-eieren-plus

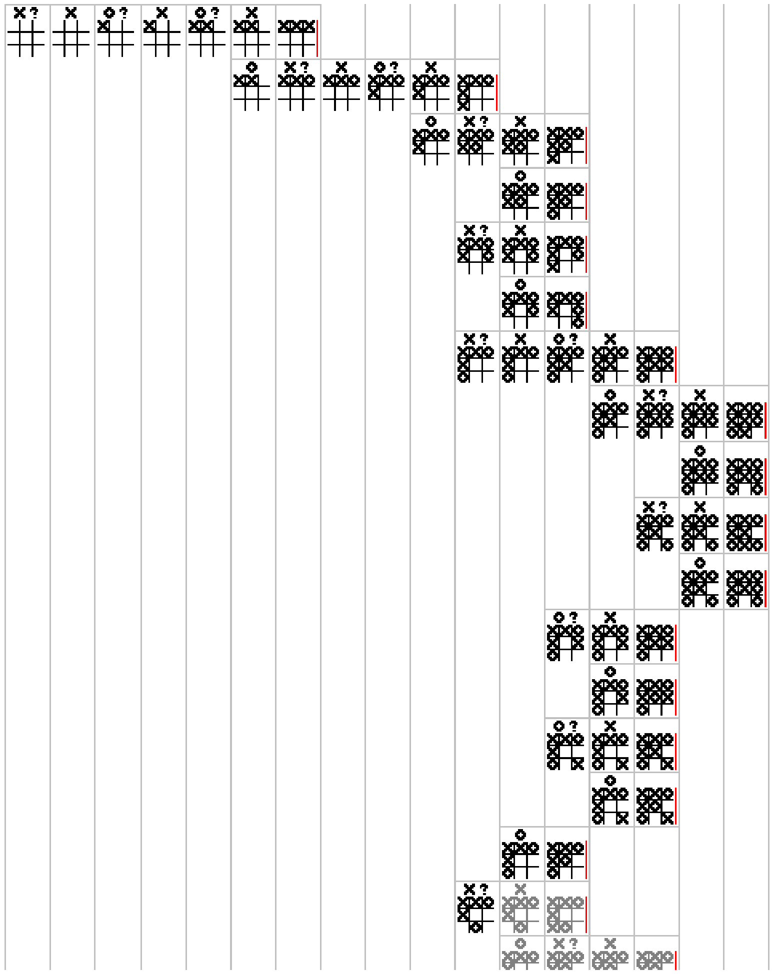
Boter-kaas-en-eieren is een bekend voorbeeld van een spel dat opgelost is. De boom is ook niet al te complex. Beide spelers kunnen een strategie spelen, waarbij zij de tegenstander niet laten winnen en zo hun eigen verlies beperken. Het maximale verlies wordt geminimaliseerd. Als een speler deze strategie hanteert, dan behaalt hij/zij een gelijkspel of een overwinning. Omdat er voor beide spelers zo'n strategie is, zal er altijd een gelijk spel uitkomen. Hierdoor is boter-kaas-en-eieren niet erg interessant meer.

Om het spel iets interessanter te maken kun je een regel toevoegen. In dit voorbeeld is die regel: *Voordat een speler zijn/haar steen plaatst wordt er met een dobbelsteen gegooid. Als het aantal ogen 5 of 6 is dan moet de speler die aan de beurt was om een steen te plaatsen zijn beurt opgeven, de andere speler moet nu een steen plaatsen. Als er 1, 2, 3 of 4 gegooid is, dan plaatst de speler zijn/haar steen. Nadat een speler een steen geplaatst heeft is de andere speler weer aan de beurt.*

Stel de speler met 'X' is aan de beurt. Hij/zij gooit 5. Nu moet de speler met 'O' een zet doen, daarna is de speler met 'X' weer aan de beurt. Hij/zij gooit nu 4 en mag nu zelf een zet doen, waarna de speler met 'O' aan de beurt is.

Deze uitgebreide versie van boter-kaas-en-eieren noem ik boter-kaas-en-eieren-plus.

Door de toevoeging van een toevalselement (de dobbelsteen) zijn er ineens veel meer bordstellingen mogelijk. De boom wordt een heel stuk complexer. Hieronder staat een stukje van de boom uitgewerkt. Om wat ruimte te besparen is deze boom niet in zijn geheel opgenomen. Boven elke bordstelling staat wie er aan zet is, dit is een onderdeel van de bordstelling. Als er een vraagteken achter het symbool van de speler staat, dan moet er met de dobbelsteen gegooid worden.



Figuur 13: Begin van de spelboom bij boter-kaas-en-eiren-plus

Door nu de boom weer vanaf de bladeren met verwachtte resultaten te vullen kun je ook nu voor beide spelers de beste strategie vinden.

In regel 8 en 9 van de boom zie je de eindpunten van twee paden (kolom 15). Één keer wint ‘X’ en de andere keer wint ‘O’. Even daarvoor (kolom 13) staat een bordstelling, waarin het toeval bepaald welk pad er gevolgd moet worden. Beide opties hebben een kans. Met deze kansen kun je de verwachte uitkomst bepalen van deze bordstelling. Naar verwachting zal ‘X’ in 2/3 van de gevallen winnen en ‘O’ in 1/3 van de gevallen. De winst voor ‘X’ is dan naar verwachting 2/3 – 1/3 = 1/3.

Op dezelfde manier kun je de verwachte uitkomst bepalen voor de stelling op regel 10, kolom 13. Deze blijkt hetzelfde te zijn. Gewapend met de verwachtingen voor deze twee stellingen kun je de beste beslissing van ‘O’ in de stelling die op regel 8, kolom 12 staat bepalen. Omdat voor beide opties die ‘O’ heeft de verwachtte uitkomst hetzelfde is, maakt het hier niet uit wat er besloten wordt. Deze stelling krijgt nu als verwachtte uitkomst de uitkomst van de keuze die ‘O’ zal gaan maken. Dat is in dit geval dus 2/3 overwinning voor ‘X’ en 1/3 overwinning voor ‘O’.

Op deze manier kun je door van de bladeren naar de wortel te werken alle verwachtingen uitrekenen. Deze techniek wordt ook wel Stochastisch Dynamisch Programmeren genoemd. In sommige gevallen wordt het een gelijkspel, er is dan geen winnaar en dus geen uitbetaling, hier moet je rekening mee houden bij het wegen van verschillende opties die een speler heeft. Als twee opties een gelijke verwachtten uitbetaling hebben (na verrekening van winst en verlieskansen, dan moet de aanwezigheid van de kans op gelijk spel de doorslag geven.

In Boter-kaas-en-eieren-plus wint ‘X’ in *9522/19683* deel van de gevallen, wint ‘O’ in *7233/19683* deel van de gevallen en wordt het in *2928/19683* deel van de gevallen een gelijkspel. Dit alles natuurlijk als beide spelers optimaal spelen. Het spel heeft een lichte voorkeur voor de beginnende speler.

Boter-kaas-en-eiren-plus is niet eerlijk

7 Conclusies

Het is in principe mogelijk om de eerlijkheid van een spel te bepalen. Om de eerlijkheid te bepalen moet je wel eerst de optimale strategie(ën) vinden voor alle spelers.

Als er meer dan twee spelers zijn dan is het soms niet duidelijk wat eerlijk is en wat niet.

Speltheorie gaat niet altijd helemaal op, omdat spelers niet altijd volgens de axioma’s handelen.

Het bepalen van de eerlijkheid van een spel is in veel gevallen praktisch onmogelijk, omdat de huidige apparatuur de complexiteit nog niet voldoende kunnen bevatten. Het beschikbare werkgeheugen en rekensnelheid is niet voldoende.

Go is op zowel een 1x1 bord als op een 2x2 bord eerlijk.

Boter-kaas-en-eieren-plus (zie sectie 6.2) is niet eerlijk.

8 Referentielijst

– *Wat is een spel:*
http://www.pitt.edu/~jduffy/econ1200/Lectures.htm

– *Classificatie/elementen van spellen:*
http://assets.cambridge.org/0521814626/sample/0521814626WS.pdf

– *Algemene speltheorievoorbeelden:*
http://william-king.www.drexel.edu/top/eco/game/game.html

– *Algemene speltheorie-informatie:*
http://www.gametheory.net/

– *Eerlijkheid (in zero-sum games):*
http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/mat.pdf

– *Voorbeelden (uit de werkelijkheid):*
Kranten; tv-journaals; http://www.nu.nl

– *Go-theorie:*
The Game of Go, Matthew MacFadyen

– *Schaak-theorie:*
Diverse prisma schaakboeken