

De Wiskunde achter Zeilen



Eva Ouwehand

BMI werkstuk

Vrije Universiteit
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Business Mathematics and Informatics
De Boelelaan 1083
1081 HV Amsterdam

augustus 2008

Voorwoord

Deze literatuurstudie is een onderdeel van het Master-programma Business Mathematics and Informatics (BMI) van de Vrije Universiteit te Amsterdam.

Wiskundige modellen kunnen bruikbaar zijn bij het optimaliseren van de prestaties van een zeilschip. In dit werkstuk staan de volgende twee vraagstukken centraal:

- 1) Wat is de optimale koers van een zeilschip, afhankelijk van de windkracht?
- 2) Wanneer is het met de *aan de wind* koers beter om de zeilen te strijken en op de motor verder varen?

Ik wil graag Rob van der Mei bedanken voor zijn tijd, enthousiasme en terugkoppeling. Ook wil ik mijn dank betuigen aan mijn ouders voor hun hulp bij het praktijkonderzoek en Liv Harkes voor haar motivatie en luisterend oor.

Eva Ouwehand
Amsterdam, augustus 2008

Inhoudsopgave

Voorwoord.....	2
Inhoudsopgave.....	4
Inleiding.....	6
1 Een introductie in zeilen.....	8
1.1 De zeilwereld.....	8
1.2 Categorieën en schepen.....	8
1.3 De koersen.....	9
1.4 De techniek van zeilen.....	11
1.5 Uitleg van het probleem.....	13
2 Theorie : Wiskundige modellen.....	16
2.1 Inleiding wiskundig model.....	16
2.2 Lineair model voor $F(\theta)$	17
2.2.1 Zeilen zonder hulpmotor.....	17
2.2.2 Zeilen met hulpmotor.....	18
2.3 Kwadratisch model voor $F(\theta)$	19
2.3.1 Zeilen zonder hulpmotor.....	19
2.3.2 Zeilen met hulpmotor.....	20
2.4 Koersverandering model.....	21
3 Toepassing in de praktijk.....	22
3.1 Experiment (BM).....	22
3.1.1 De voorbereiding.....	22
3.1.2 Het experiment.....	23
3.2 Duitse schepen.....	26
3.2.1 Galei Schip Carola.....	26
3.2.2 Duits zeilvrachtschip.....	29
4 Samenvatting.....	34
4.1 Conclusies.....	34
4.2 Aanbevelingen.....	34
Bronvermelding.....	36

Inleiding

Dit werkstuk gaat over het bepalen van de optimale koers die een schip moet varen om zo snel mogelijk een gegeven eindpunt te bereiken. De *optimale* koers is de hoek die een schip met de wind maakt waarbij de eindbestemming het snelst bereikt wordt. De optimale koers hangt in het algemeen af van factoren zoals de windsnelheid, de windrichting en het soort schip. Om de optimale koers te bepalen wordt gebruik gemaakt van een aantal wiskundige modellen.

Door de almaar stijgende prijs van olie zou zeilend varen een serieus alternatief voor vrachtvervoer kunnen worden [4]. In de jaren zeventig, ten tijde van de “oliecrisis”, werd in Duitsland het zogenoemde “Dynaschiff” ontworpen. Het Dynashiff die veel vracht kan vervoeren en heeft door de zes aanwezige masten minder energie nodig. Bij een normaal vrachtschip kan met behulp van een kite kan onder ideale omstandigheden tot wel 50% brandstof worden bespaard, als de kite aan een 350 meter lange lijn bevestigd is en de windkracht zeven is [5]. In hoofdstuk drie wordt beschreven wat de optimale koers is van een schip uit 1600, hetgeen onderzocht is door hogeschool Bremen.

Het verslag is opgedeeld in vier hoofdstukken. In het eerste hoofdstuk zal een introductie over de zeilwereld worden gegeven. Hierin worden de soorten schepen, de techniek van het zeilen en de verschillende soorten koersen besproken. In het tweede hoofdstuk worden twee modellen om de optimale koers van een zeilschip te benaderen besproken. In het derde hoofdstuk wordt de reële snelheid van zeilschepen onder de verschillende koersen bekeken, waarbij de data van twee Duitse zeilschepen zijn gebruikt. Tevens is getracht deze gegevens bij een klein zeilschip te vinden in een klein praktijkonderzoek op de Kagerplassen. Het werkstuk eindigt met een samenvatting in hoofdstuk vier.

1 Een introductie in zeilen

Zeilen kan worden omschreven als:

“Zich met behulp van zeilen over het water voortbewegen”

Een zeilschip wordt omschreven als:

“Een schip dat uitsluitend door zijn zeilen wordt voortbewogen”

1.1 De zeilwereld

In Nederland heeft het Koninklijk Nederlands Watersport Verbond (KNWV) ruim 400 verenigingen en ongeveer 100.000 leden, het merendeel hiervan is geen wedstrijdzeiler. Het watersportverbond erkent 81 wedstrijdklassenorganisaties, daaronder vallen onder andere de valken klassenorganisatie, de Noordzee club en de 16M klassenorganisatie.

Er zijn in Nederland sinds 13 juni 2008 42 erkende zeiltalenten en 51 beloftes. Van deze zeiltalenten hebben er zestien een A-status, zes een B-status, tien vallen in de categorie Internationaal Talent en acht vallen in de categorie Nationaal Talent, maar slechts twee hebben een High Potential Status.

Een Olympische zeiler krijgt van het NOC-NSF indien in het bezit van een A-status of B-status een uitkering. Een Olympische zeiler traint 5 a 6 dagen in de week en voor een baan naast de uitkering is geen tijd. Wie als topsporter rijk wil worden kan beter een andere sport dan zeilen kiezen.

1.2 Categorieën en schepen

Zeilen is in verschillende categorieën in te delen: recreatievaart, wedstrijdzeilen en beroepsvaart. In de beroepsvaart en bij wedstrijdzeilen gaat het schip van punt A eventueel via B naar C, terwijl bij de recreatievaart niet de route of het eindpunt van belang zijn, maar voornamelijk het plezier van het zeilen en het gezelschap. In de beroepsvaart en bij wedstrijdzeilen gaat het om de snelste route met de optimale gewichtsverdeling en zeilstand, vooral bij het wedstrijdzeilen zijn dat hele belangrijke punten.

In de beroepsvaart zijn zeilschepen niet in de meerderheid, maar met bijvoorbeeld SAIL2005 waren er vele aanwezig in Amsterdam. De beroepsvaartschepen zijn vaak grote schepen, zoals de clipper Stad Amsterdam, zij varen vooral over oceanen.

Binnen wedstrijdzeilen zijn er vele type verschillende schepen, daarom worden er per soort schip wedstrijden georganiseerd. Zo zijn er wedstrijden voor 16m², BM (Bergumermeer), Catamaran, Laser, Optimist, Splash en de Trimaran. De eenpersoonsschepen Laser, Optimist en Splash hebben een zwaard en één grootzeil als tuigage. De leeftijdseis om in een Laser of Splash te mogen varen is 12 jaar, de leeftijd voor de Optimist is vanaf 6 jaar en tot en met 15 jaar. De 16m² en de BM hebben een grootzeil en fok als tuigage, de BM is een zwaardboot en de 16m² is een kielboot.

De Catamaran en de Trimaran hebben geen zwaard of kiel, ze hebben een grootzeil en fok als tuigage eventueel uitgebreid met spinnaker bij de koersen halve wind, ruime wind en voor de wind. Figuur 1.2.1 laat verschillende sloopstypes zien.

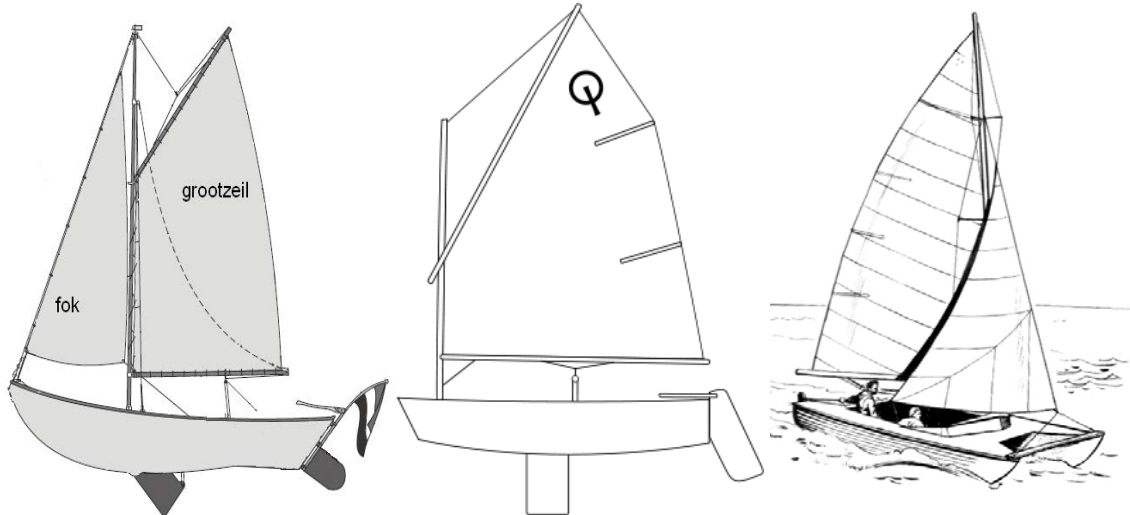


Fig 1.2.1 Van links naar rechts Lelievlet, Optimist, Catamaran (bron: [2,6,7]).

1.3 De koersen

De koersen die met zeilschepen kunnen worden gevaren zijn afhankelijk van de windrichting. Er zijn vijf koersen, zie figuren 1.3.1.

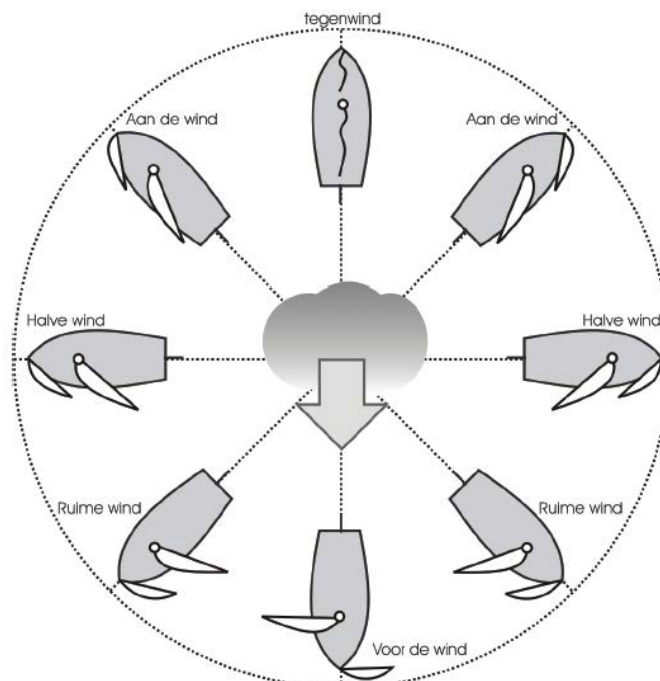


Fig 1.3.1: Illustratie van de vijf mogelijke zeilkoersen (bron: [2]).

De koers is de hoek die een schip met de wind maakt, met tegenwind is de koers 0° .

In de wind:

De wind komt recht van voren, het zeil klappert en het schip ligt stil.

Aan de wind:

De wind komt schuin van voren, het zeil is strak aangetrokken.

Halve wind:

De wind komt recht van opzij in een hoek van 90°, het zeil staat half uit.

Ruime wind:

De wind komt schuin van achteren, het zeil krijgt veel ruimte.

Voor de wind:

De wind komt recht van achteren, het zeil staat zo ver mogelijk uit.

Bij elke koerswijziging moet de zeilstand worden aangepast, bij een scherpere koers moeten de zeilen strakker worden aangetrokken.

Er zijn twee manieren om “door de wind” te gaan, namelijk “overstag gaan” en “gijpen”. Overstag gaan houdt in dat van *aan de wind* met de zeilen over bakboord dan wel stuurboord, naar *aan de wind* met de zeilen aan de andere zijde wordt gegaan, zie figuur 1.3.2. Gijpen gebeurt in de koers *voor de wind*, als de wind recht van achteren komt kan het zeil aan beide zijde evenveel wind vangen en kan het zeil dus zonder koerswijziging van zijde veranderen, zie figuur 1.3.3.

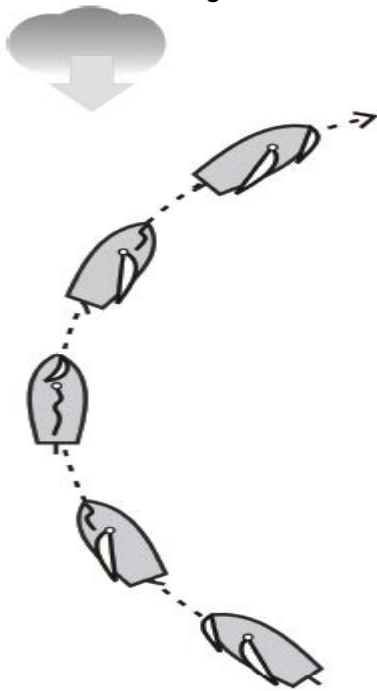


Fig 1.3.2: Overstag gaan van zeilschip (bron: [2]).

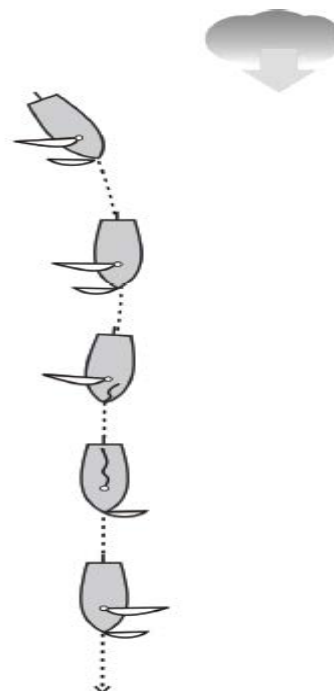


Fig 1.3.3: Gijpen met een zeilschip (bron: [2]).

Bij veel wind wordt gijpen bij veel schepen vermeden omdat dit risicovoller is dan overstag gaan. Dit komt omdat overstag gaan meer tijd kost en er daardoor meer controle over het schip is. In plaats van gijpen wordt dan een zogenaamd stormrondje gedaan waarin alle koersen voorbij komen, zie figuur 1.3.4.

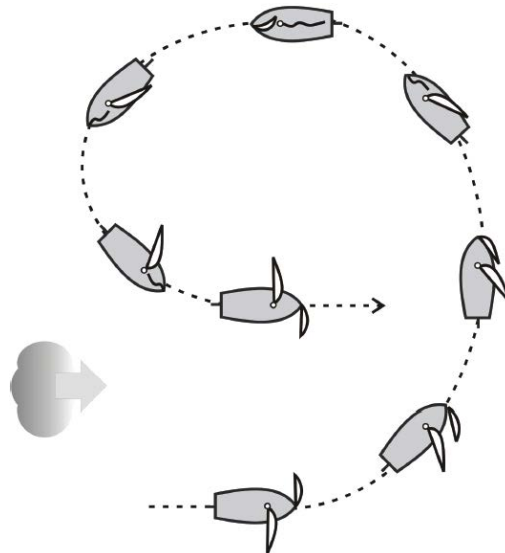


Fig 1.3.4: Stormrondje om gijpen te voorkomen (bron: [2]).

Vanaf windkracht zeven op de schaal van Beaufort wordt zeilen in een kielboot afgeraden. Met een zeilschip in het water is met onweer geen goed plan, het schip is al dan niet het hoogste punt op het water en daar wil de bliksem wel eens inslaan. Met onweer is het verstandiger om het zeilschip af te meren.

Afhankelijk van het soort schip wordt de hoogste snelheid bij een bepaalde koers bereikt, bijvoorbeeld voor een vierkantgetuigde driemaster is *voor de wind* niet de snelste koers, aangezien alleen de zeilen van de achterste mast wind vangen. Overstag gaan met een groot schip als de Stad Amsterdam gaat langzamer dan met een BM, dit onder andere omdat de stand van meer zeilen moet worden aangepast.

1.4 De techniek van zeilen

Een zeilschip komt vooruit door de wind. Bij de koersen voor de wind en ruime wind duwt de wind in de zeilen en daardoor het schip vooruit in de gewenste richting, zie figuur 1.4.1.

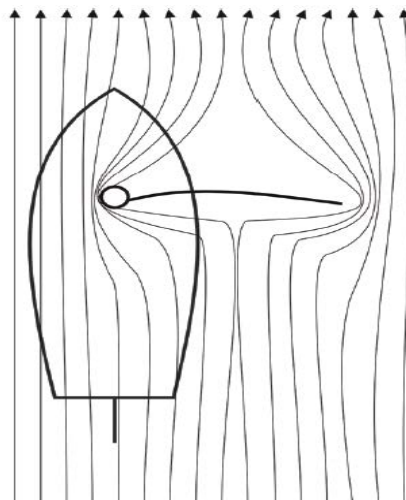


Fig 1.4.1: De wind kan niet door het zeil en duwt het zeil met mast en boot eraan verbonden vooruit (bron: [2]).

Bij de koersen *halve wind* en *aan de wind* werkt dit principe niet, bij deze koersen maakt een zeilschip gebruik van bovendruk en onderdruk. Volgens de wet van Bernoulli [6] geldt dat een toename in de snelheid van een soort gas gepaard gaat met een verlaging van de druk van dat gas. Dat wil zeggen dat als lucht met een hogere snelheid aan de ene kant over een vleugelprofiel stroomt dan aan de andere kant er een drukverschil ontstaat dat kracht op de vleugel zal uitoefenen. Als door de luchtstroom aan een zijde van het zeil een onderdruk ontstaat, dan is er aan de andere kant een overdruk en zal het voorwerp in de richting van de onderdruk worden geduwd, zie figuur 1.4.2.

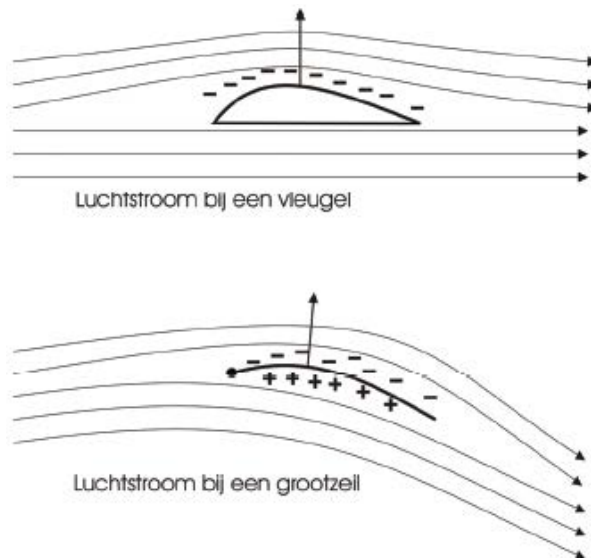


Fig 1.4.2 Boven de luchtstroming rondom een vliegtuigvleugel, onder bij een grootzeil van een zeilschip (bron: [2]).

Door deze theorie komt een zeilschip ook bij scherpe koersen vooruit doordat de luchtstroom langs beide zijden van het zeil stroomt, dit kan alleen als het zeil strak staat en niet klappert. Als het zeil echter te strak staat, wordt de luchtstroom verbroken en zal de luchtstroom worden omgebogen. De onderdruk kan nog groter worden door het gebruik van een fok (voorzeil). De fok zorgt ervoor dat achter de fok nog maar een kleine opening tussen fok en grootzeil is waar de luchtstroom doorheen kan, hierdoor zal de lucht meer worden samengeperst en daardoor harder gaan stromen, zie figuur 1.4.3.



Fig 1.4.3: Luchtstroom bij zeilschip dat zowel fok als ook grootzeil heeft (bron: [2]).

1.5 Uitleg van het probleem

Om de optimale route te berekenen, met als doel het eindpunt zo snel mogelijk te bereiken, is niet alleen de afstand van belang, maar ook de snelheid van het schip per hoek met de wind (koers), θ . Een aanname is dat de wind recht van voren komt en dat overstag gaan geen tijd kost. In figuur 1.5.1 zijn de afstanden te zien die een zeilschip met verschillende koersen moet afleggen, hoe scherper de koers des te korter de afstand. Bij route 1 is de af te leggen afstand het kortste, doordat dit een zeer scherpe koers is, echter het schip komt waarschijnlijk minder snel vooruit dan bij de andere routes, bij route 3 is deze afstand het langst. De snelste manier om het aan de wind liggende eindpunt te bereiken hangt af van de afstand en de snelheid van het schip.

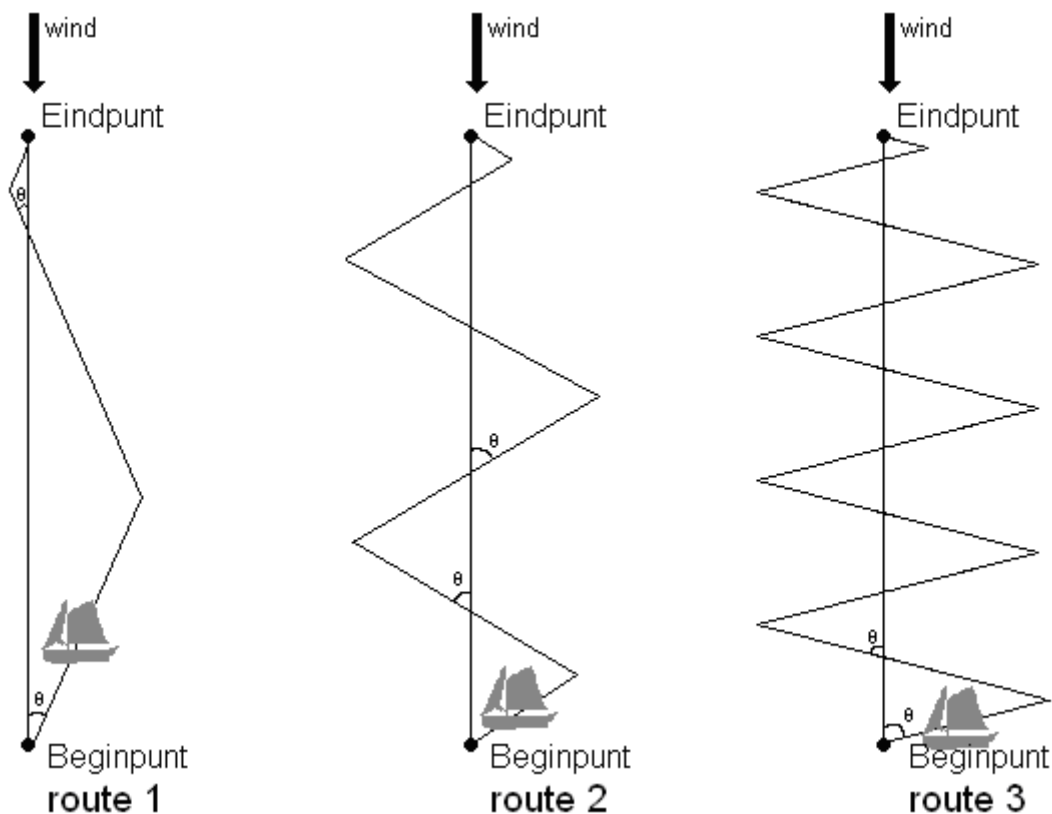


Fig 1.5.1: De afstand die een zeilschip moet afleggen verschilt per koers.

Alleen zeilend of zeilend met motor varen is wellicht niet de snelste route om bij het eindpunt te komen. Zo kan ook eerst onder zeil eventueel met motor worden gevaren om daarna een andere koers te varen die alleen met motor kan worden gevaren. In figuur 1.5.2 wordt dit voor verschillende optimale zeilkoersen getoond, hierin is θ de optimale zeilkoers en φ de optimale motorkoers ten opzichte van de windrichting.

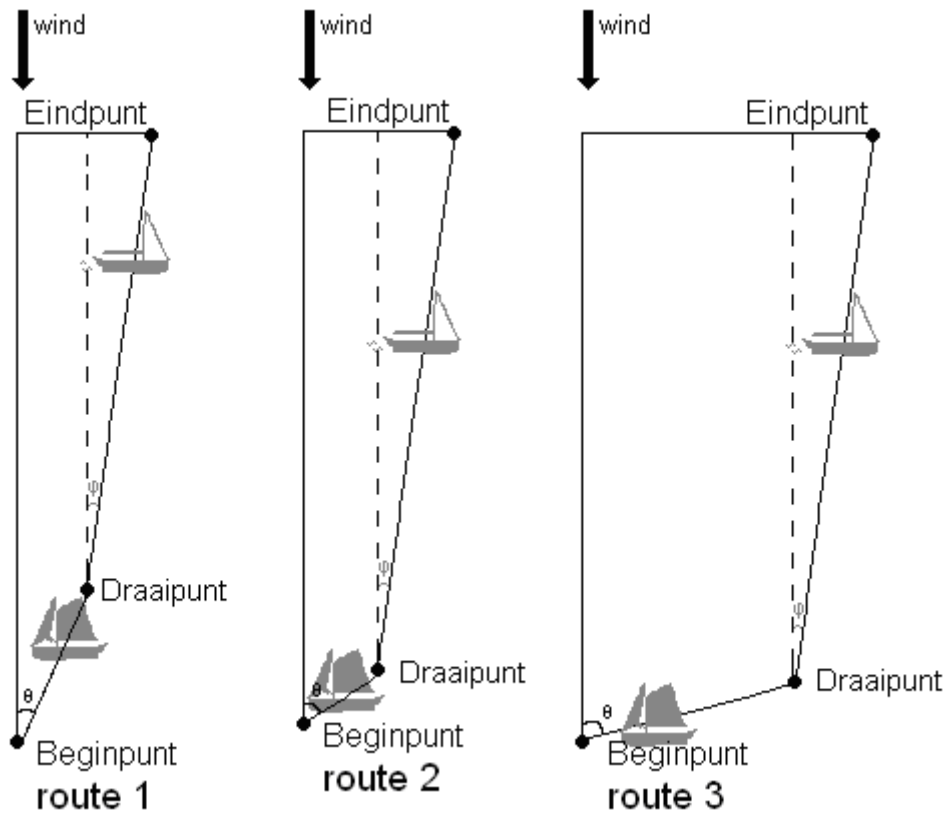


Fig 1.5.2: De afstand die een zeilschip moet afleggen indien een hulpmotor aanwezig is.

In figuur 1.5.2 wordt voor drie verschillende optimale koersen de optimale route naar een eindpunt getoond. Het traject tot het draaipunt wordt met motor en zeilen gevaren onder de koers θ , na de draai worden de zeilen gestreken en de motorkoers met hoek φ gevaren.

2 Theorie: Wiskundige modellen

2.1 Inleiding wiskundig model

De snelste route naar een hoger aan de wind gelegen punt met een zeilschip hangt van veel factoren af, zoals de windsnelheid, de stroming en of voorrang moet worden verleend aan andere schepen. Als aangenomen wordt dat al deze factoren constant zijn en de snelste route van schip tot eindpunt gevaren wordt, dan kan deze route met een hoek naar de wind toe worden omschreven, deze hoek wordt θ genoemd. De lengte van de route is ongelijk aan de kortste afstand a , zie figuur 2.1.1, de afstand is afhankelijk van de hoek waarin gevaren wordt. Er vanuit gaande dat de kortste af te leggen afstand a , een directe lijn van beginpunt B naar eindpunt e, bekend is evenals de hoek met de wind θ , dan kan de af te leggen afstand x , als volgt worden berekend: $x = a \cdot \sec(\theta)$

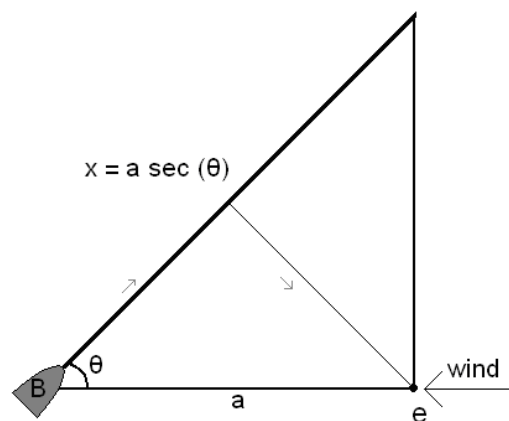


Fig 2.1.1: De afgelegde afstand afhankelijk van de koers.

De cosinus van hoek θ is de aanliggende zijde a gedeeld door de schuine zijde x , aangezien niet de hoek, maar de schuine zijde onbekend is kan de lengte worden bepaald door a met $\sec(\theta)$ te vermenigvuldigen, $\sec(\theta) = 1/\cos(\theta)$. De lengte van deze schuine zijde van een driehoek is $a \cdot \sec(\theta)$. Hoe scherper aan de wind gevaren wordt, des te korter wordt de te varen afstand, echter niet alle koersen zijn te zeilen.

De snelheid van het schip is een functie van θ , afhankelijk van het model en de kwaliteiten van het schip, deze functie zal $F(\theta)$ worden genoemd. De tijd die het kost om naar het eindpunt te komen is de afstand x gedeeld door de snelheid, deze formule moet geminimaliseerd worden. Neem $u = a \cdot \sec \theta / F(\theta)$, de θ waardoor de u minimaal is wordt θ^* genoemd en is de optimale vaarhoek. θ^* is de waarde van θ waarvoor geldt:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{(a \cdot \tan(\theta) \cdot F(\theta) \cdot \sec(\theta) - a \cdot F'(\theta) \cdot \sec(\theta))}{[F(\theta)]^2} = 0 \quad \{2.1.1\}$$

waarbij

$$F(\theta) \cdot \tan(\theta) - F'(\theta) = 0 \quad \{2.1.2\}$$

Formule 2.1.2 kan met "trial and error" worden opgelost met behulp van een tabel die voldoende precies is voor deze praktische toepassing. De uitkomst van deze formule geeft een hoek onder welke koers het beste gevaren kan worden. In dit model ligt de eindbestemming recht tegen de wind in en kost overstag gaan geen extra tijd.

2.2 Lineair model voor $F(\theta)$

In deze paragraaf wordt een lineaire benadering voor $F(\theta)$ besproken voor de zeilschepen met en zonder hulpmotor.

2.2.1 Zeilen zonder hulpmotor

De formule $F(\theta)$ moet voor elk schip apart worden bepaald door te experimenteren, maar als een lineaire benadering kan voor zeilboten $F(\theta) = k(\theta - \alpha)$ worden genomen. Hier is α de grenshoek waar het schip niet meer zeilend vooruit komt. De formule 2.1.2 wordt dan:

$$k(\theta - \alpha) \cdot \tan(\theta) - k = 0 \quad \{2.2.1\}$$

en dus

$$\theta - \alpha = \cotn(\theta). \quad \{2.2.2\}$$

De gevonden θ^* via formule 2.2.2 geeft de hoek die we het beste kunnen varen. Als aanname wordt genomen dat deze hoek onafhankelijk is van de windsnelheid.

Voor een redelijk traag schip uit 1916 [1] geldt dat $\alpha = 30^\circ$ en $\theta^* = 60^\circ$. In figuur 2.2.1 is de optimale koers in tijd uitgedrukt te zien, voor verschillende k 's en voor $\alpha = 30^\circ$. Merk op dat het eindpunt op 0° met een hoek van 90° nooit te bereiken is.

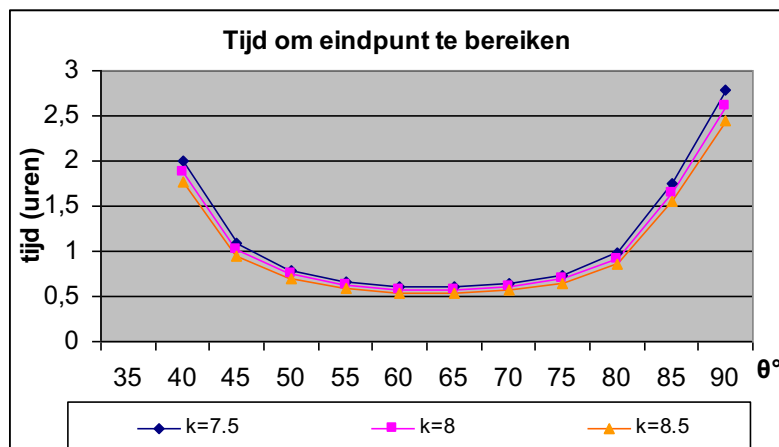


Fig 2.2.1: De tijd die het schip erover doet om het eindpunt te bereiken, onder verschillende zeilkoersen voor het lineaire model.

In figuur 2.2.1 is te zien dat de tijd om één mijl af te leggen bij de optimale koers van ongeveer 60° het kortste is, het verschil met de omliggende koersen is echter klein.

2.2.2 Zeilen met hulpmotor

Nu is het heel mooi om met een zeilschip te weten onder welke koers het beste gevaren kan worden, maar je kan sneller op het eindpunt komen als er een hulpmotor aanwezig is. De vraag die hierbij geldt: is de aankomst eerder als dat enkel zeilend, zeilend met motor of de zeilen te strijken en alleen met de hulpmotor te varen gebeurd? Als een hulpmotor aanwezig is en deze kan het schip een *extra* snelheid v meegeven, dan is de snelheid die met het schip behaald kan worden

$$F(\theta) = v + k(\theta - \alpha) \quad \{2.2.3\}$$

en de formules 2.1.2 wijzigt in

$$[v + k(\theta - \alpha)] \tan \theta - k = 0, \quad \{2.2.4\}$$

ofwel

$$\frac{v}{k} + (\theta - \alpha) = \cot \theta \quad \{2.2.5\}$$

In dit model is v een constante en geen functie van θ . Als de $\alpha = 30^\circ$, $v = 6$ en $k = 8$, dan wordt θ^* ongeveer 45° . Met de hoek van 45° richting de wind kan de snelste route met motor en zeilen kan worden afgelegd.

De tijd die het kost om een mijl tegen de wind in te varen met zeilen en motor is $(a \sec \theta) / [v + k(\theta - \alpha)]$ uur. Als dit wordt teruggerekend met $\alpha = 30^\circ$, $v = 6$, $k = 8$ en $\theta^* = 45^\circ$, dan komt dit neer op een 0.175 uur, ofwel 10.5 minuten. De tijd die het kost om een mijl met een motor in een hoek van β tegen de wind in te varen is $\sec(\beta)/v$, deze afstand duurt slechts 0.167 uur, ofwel 10 minuten. De tijd die het kost om een mijl onder motor af te leggen met een hoek van β tegen de wind in is minder dan 0.175 als β kleiner dan 18° is.

De aanwijzingen om het snelste op de eindbestemming te komen zijn als volgt:

- Als de eindbestemming tussen een hoek van 0° en 18° van de windrichting ligt, strijk de zeilen en vervolg de kortste route met de motor. (e6)
- Als de eindbestemming tussen de hoek 18° van de windrichting en de gevonden 45° van de wind ligt, dan wordt het eindpunt het snelst bereikt door met motor en zeilend verder te varen met een hoek van 45° bij elke koers. (e3, e4, e5, e7, e8)
- Als de eindbestemming meer dan 45° van de wind af ligt, ga dan in een rechte lijn richting de eindbestemming met zeilen en motor. (e1, e2, e9, e10)

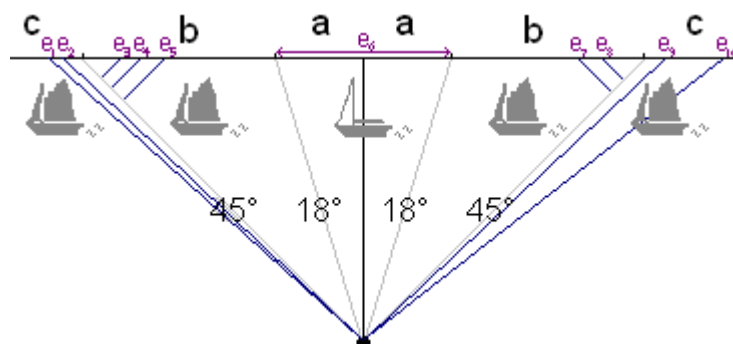


Fig 2.2.2 Het eindpunt kan afhankelijk van de hoek, op de manieren a, b en c het snelst te bereiken.

2.3 Kwadratisch model voor $F(\theta)$

In deze paragraaf wordt een kwadratische benadering voor $F(\theta)$ besproken voor de zeilschepen met en zonder hulpmotor.

2.3.1 Zeilen zonder hulpmotor

Het lineaire model is een simpel model om de snelheid van een zeilboot te benaderen. De aanname van de snelheid met zeilen kan wellicht beter kwadratisch zijn. De af te leggen afstand blijft $a \sec(\theta)$, dus de functie $u(\theta)$ wordt $a \sec(\theta)/(a \cdot (\theta - \alpha) + b \cdot (\theta - \alpha)^2)$. De a en de b in deze formule kunnen door onder twee koersen te varen worden gevonden. Hier is α de hoek waartegen het schip niet in kan zeilen en θ is de hoek van de koers met de windrichting. Als alleen onder zeil wordt gevaren is de snelheid:

$$F(\theta) = a \cdot (\theta - \alpha) + b \cdot (\theta - \alpha)^2 \quad \{2.3.1\}$$

en formules 2.1.2 wordt dan

$$[a \cdot (\theta - \alpha) + b \cdot (\theta - \alpha)^2] \cdot \tan(\theta) = a + 2 \cdot b \cdot (\theta - \alpha), \quad \{2.3.2\}$$

of wel

$$\left(\tan(\theta) - \frac{2 \cdot b}{a} \right) \cdot (\theta - \alpha) + \frac{b}{a} \cdot (\theta - \alpha)^2 \tan(\theta) = 1 \quad \{2.3.3\}$$

Als aanname is gedaan dat $\alpha = 30^\circ$ en het schip twee knopen vaart als $(\theta - \alpha)$ een kwart is en drie knopen als $(\theta - \alpha)$ een half is. De waardes van a en b kunnen nu berekend worden: $2 = a/4 + b/16$ en $3 = a/2 + b/4$, dan wordt $a = 10$ en $b = -8$, dan geeft formule 3.12 een optimale hoek van ongeveer 55° . De aannames die leiden tot de waardes voor a en b komen uit [1].

In figuur 2.3.4 staat het lineaire en het kwadratische model in een grafiek ter vergelijking. Als aanname is in beide modellen gedaan dat $\alpha = 30^\circ$ en dat het schip onder zeilen varende twee knopen vaart als $(\theta - \alpha)$ een kwart is, dit is het punt waar de modellen elkaar kruisen.

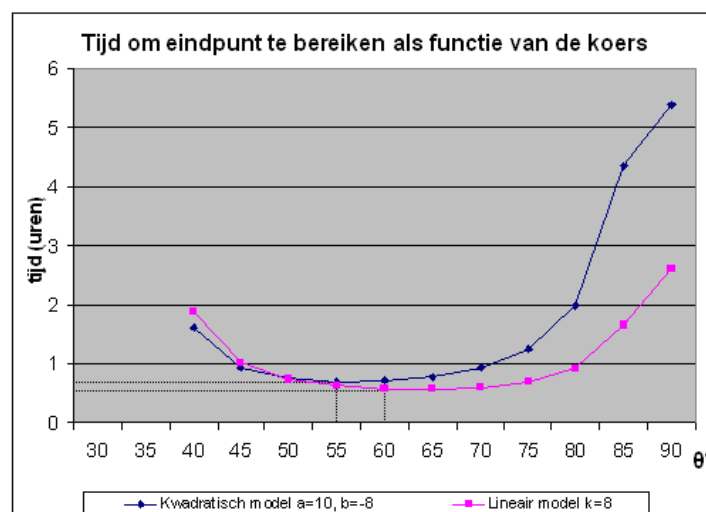


Fig 2.3.4: De tijd die het schip erover doet om het eindpunt op een hoek van 0° met de wind te bereiken van het lineaire en het kwadratische model.

Opmerkelijk aan figuur 2.3.4 is dat de optimale hoek verschilt, maar de tijd nagenoeg gelijk is.

2.3.2 Zeilen met hulpmotor

Als de snelheid voor met motor varen gelijk blijft aan het lineaire model dan wordt de snelheid voor met motor en zeil varend:

$$F(\theta) = v + a \cdot (\theta - \alpha) + b \cdot (\theta - \alpha)^2 \quad \{2.3.6\}$$

en wordt de functie 2.1.2

$$[v + a \cdot (\theta - \alpha) + b \cdot (\theta - \alpha)^2] \cdot \tan(\theta) = a + 2 \cdot b \cdot (\theta - \alpha), \quad \{2.3.7\}$$

of

$$\left(\tan(\theta) - \frac{2 \cdot b}{a} \right) \cdot (\theta - \alpha) + \left[\frac{b}{a} \cdot (\theta - \alpha)^2 + \frac{v}{a} \right] \cdot \tan(\theta) = 1, \quad \{2.3.8\}$$

De beste koers om onder motor en zeil te varen wordt dan ongeveer 41.5° .

De tijd die het kost om een mijl tegen de wind in te varen met zeilen en motor is

$$(\sec(\theta) / [v + a \cdot (\theta - \alpha) + b \cdot (\theta - \alpha)^2]) \quad \{2.3.9\}$$

Als dit wordt teruggerekend met $\alpha = 30^\circ$, $v=6$, $a=10$ en $b=-8$ en $\theta^*=41.5^\circ$, dan komt neer op een 0.1738 uur ofwel 10.4 minuten. De tijd die het kost om een mijl met een motor in een hoek van β tegen de wind in te varen is $\sec(\beta)/v$, deze afstand duurt slechts 0.167 uur ofwel 10 minuten. De tijd die het kost om een mijl onder motor af te leggen met een hoek van β tegen de wind in is minder dan 0.1738 als β kleiner dan 16.5° is. Alleen op motor varen is in dit geval alleen sneller als de hoek met de wind minder dan 16.5° is.

De aanwijzingen om het snelste op de eindbestemming te komen zijn dan als volgt:

- Als de eindbestemming tussen een hoek van 0° en 16.5° van de windrichting ligt, strijk de zeilen en vervolg de kortste route met de motor. (e_6)
- Als de eindbestemming tussen de hoek 16.5° van de windrichting en de gevonden 41.5° van de wind ligt, dan wordt het eindpunt het snelst bereikt door met motor en zeilend verder te varen met een hoek van 41.5° bij elke koers. (e_3, e_4, e_5, e_7, e_8)
- Als de eindbestemming meer dan 41.5° van de wind af ligt, ga dan in een rechte lijn richting de eindbestemming met zeilen en motor. (e_1, e_2, e_9, e_{10})

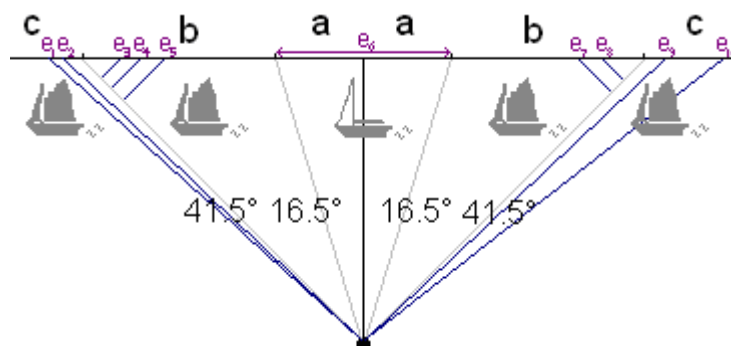


Fig 2.3.5 Het eindpunt kan afhankelijk van de hoek, op de manieren a, b en c het snelst te bereiken.

2.4 Koersverandering model

Tot dusver is de mogelijkheid om deels met zeil en motor om daarna met enkel motor te gaan varen niet meegenomen, zie figuur 2.4.1.

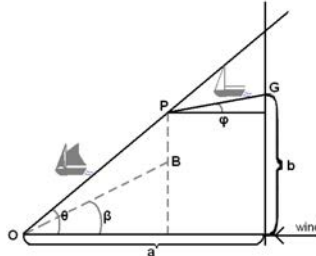


Fig 2.4.1: De afgelegde afstand als deel met zeil en motor wordt gevaren en deels met alleen de motor.

Onder een zachte wind waar β een hoek van merkbare omvang is en het einddoel in het gebied $\theta - \beta$ ligt, kan door deels onder zeil en motor en deels onder motor worden gevaren om een mogelijk beter resultaat te krijgen. Hier is φ de hoek die het schip maakt nadat de zeilen zijn gestreken, θ is de in paragraaf 2.2 en 2.3 gevonden optimale hoek om met motor en zeilen te varen β is de gevonden optimale hoek om de zeilen te strijken. O is het startpunt, P is het draaipunt en G is hier het eindpunt. Het punt B is het punt dat met alleen motor varen even snel kan worden bereikt als punt P met motor en zeilen. De tijd die het zou kosten om deze route af te leggen is gelijk aan de tijd die het kost om $OB + PG$ met motor af te leggen, waarbij

$$PG = \frac{(a \tan(\theta) - b) \cdot \cos(\theta)}{\sin(\theta - \varphi)}, \quad (2.4.2)$$

$$OB = (a - PG \cdot \cos(\varphi)) \cdot \sec(\beta), \quad (2.4.3)$$

$$OB + PG = a \sec(\beta) - PG \cdot (\cos(\varphi) \cdot \sec(\beta) - 1). \quad (2.4.4)$$

De φ dient dusdanig gekozen te worden, dat de tijd die het kost om de afstand $OB+PG$ af te leggen geminimaliseerd wordt. Dit is het geval als $PG \cdot \cos(\varphi) \cdot (\sec(\beta) - \sec(\varphi))$ een maximum is. De formule 2.4.5 moet dan ook een maximum zijn.

$$u = \frac{\cos(\theta) \cdot \cos(\varphi)}{\sin(\theta - \varphi)} \cdot [\sec(\beta) - \sec(\varphi)] = \frac{\sec(\beta) - \sec(\varphi)}{\tan(\theta) - \tan(\varphi)} \quad (2.4.5)$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{(\tan(\varphi) - \tan(\theta)) \cdot \sec(\varphi) \cdot \tan(\varphi) + (\sec(\beta) - \sec(\varphi)) \cdot \sec^2(\varphi)}{(\tan(\theta) - \tan(\varphi))^2} = 0 \quad (2.4.6)$$

$$(\tan(\theta) - \tan(\varphi)) \cdot \tan(\varphi) = (\sec(\beta) - \sec(\varphi)) \cdot \sec(\varphi) \quad (2.4.7)$$

$$\tan(\theta) \cdot \tan(\varphi) + 1 = \sec(\beta) \cdot \sec(\varphi) \quad (2.4.8)$$

$$\cos(\varphi) + \tan(\theta) \cdot \sin(\varphi) = \sec(\beta) \quad (2.4.9)$$

Via de functie 2.4.9 kan het punt, waar optimaal de zeilen gestreken moeten worden, berekend worden, aangezien β en θ bekend zijn. Voor het lineaire model met $\theta^* = 45^\circ$, $\beta = 18^\circ$ is het optimale draaipunt het moment dat het eindpunt op drie graden ligt. Voor het kwadratische model met $\theta^* = 41.5^\circ$, $\beta = 16^\circ.5$ is het optimale draaipunt het moment dat het

eindpunt wederom op drie graden ligt. Op het moment dat de eindbestemming op 3° ligt van het zeilschip zal de koerswijziging worden uitgevoerd.

3 Toepassing in de praktijk

De validatie van de in hoofdstuk twee besproken modellen zal in dit hoofdstuk aan de orde komen. Dit zal gebeuren door middel van een experiment met een klein zeilschip (BM) en de gegevens gevonden in de literatuur van twee Duitse schepen.

3.1 Experiment (BM)

Omdat het lineaire en het kwadratische model beide een wiskundige benadering van de werkelijkheid zijn, zijn deze modellen niet realistisch zijn. Om te valideren of deze benaderingen de realiteit goed benaderen is als praktijktest met een BM gezeild. Dit om te kijken welk model de realiteit dichter benadert.

3.1.1 De voorbereiding

Omdat een BM niet standaard een snelheidsmeter aan boord heeft is er geïmproviseerd. Bij elke meting moeten uiteindelijk drie variabelen bekend zijn om de snelheid te bepalen:

- * De hoek ten opzichte van de wind (koers)
- * De tijdsduur
- * De afgelegde afstand

De hoek ten opzichte van de wind wordt met het meetinstrument bepaald, zie fotoserie 3.1.1. Dit instrument werkt (hetzij ietwat onnauwkeurig), tenzij er een golf overheen komt, dan moet het vlaggetje vervangen worden.

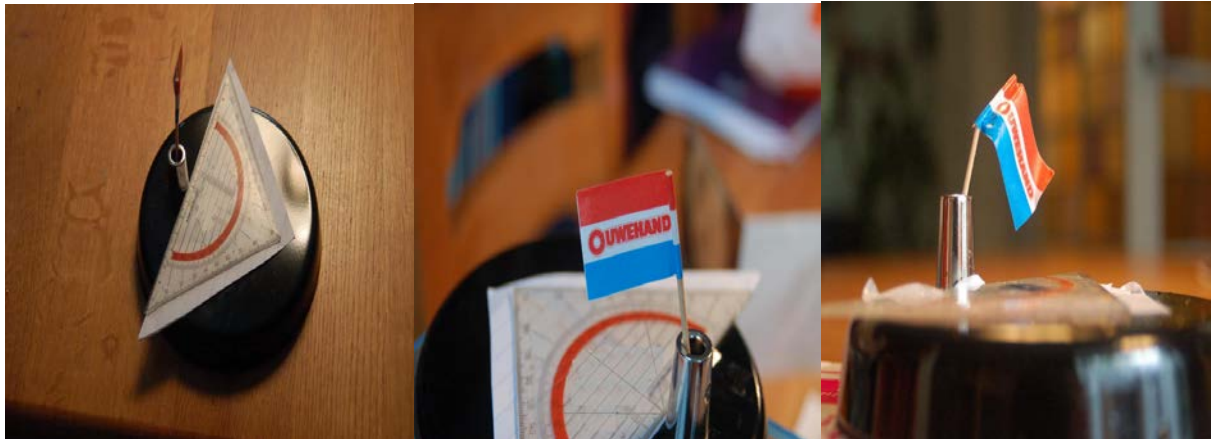


Fig 3.1.1: Meetinstrument om zonder de mast in de klimmen de koershoek te kunnen bepalen.

De tijdsduur wordt gemeten met de stopwatch functie van een mobiele telefoon, zie onderstaande foto's 3.1.2.



Fig 3.1.2 : Meetinstrument om de tijd per koers bij te houden.

De afstand X wordt eenmaal gemeten, zie figuur 3.1.3 . De locatie van de test is de Kaag en het te varen traject is op de kaart hieronder aangegeven. De θ is hier de hoek die het schip met de wind maakt.

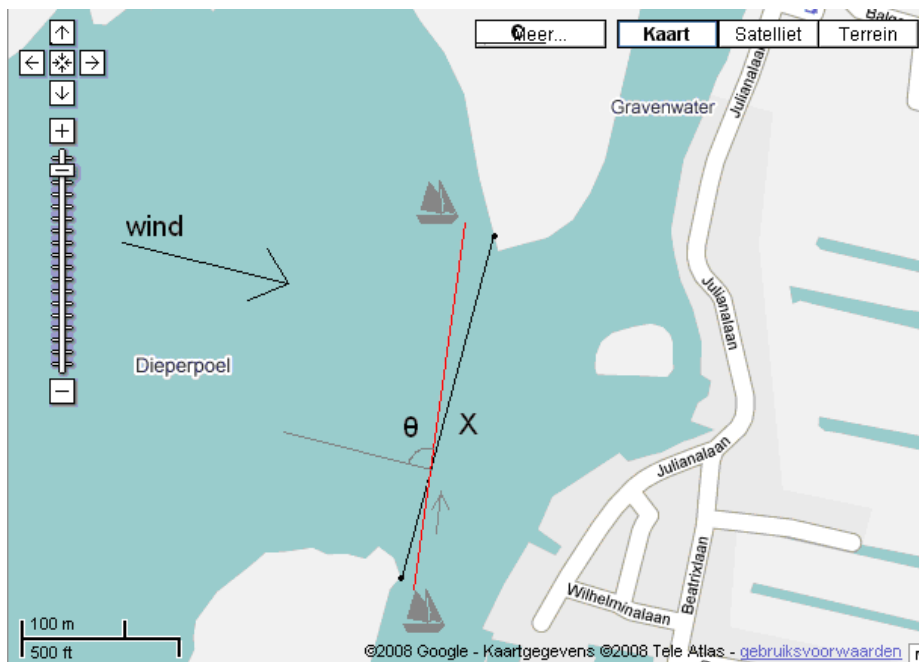


Fig. 3.1.3: Landkaart gebruikt om de afgelegde afstand te bepalen (bron: [8]).

3.1.2 Het Experiment

Om de benodigde resultaten te verkrijgen, zou onder een aantal koersen de tijd over de afgelegde afstand worden gemeten. Omdat er geen snelheidsmeter in het schip aanwezig was zou de tijd de worden bijgehouden per koers en achteraf de bijbehorende snelheid worden berekend.

Per koers zou steeds de tijd worden gestart als de boeg ter hoogte van punt één was en op het moment dat de boeg het tweede punt voorbij gevaren was zou gefinisht worden. Deze tijd zou later met de berekening een snelheid weergeven. Doordat de hoek ten opzichte van de wind wijzigt, verandert daardoor ook de afgelegde afstand, zie figuur 3.1.4/5 in tabel 3.1.6 is een overzicht van de afstanden en de berekeningen te vinden.

De berekening van de uiteindelijke snelheid zou zijn:

$$V = 0.5144 \cdot (X_{\theta} / \sin(\theta)) / s_{\theta}$$

Hier geeft V de snelheid in knopen aan, X_{θ} is de afgelegde afstand onder hoek θ en s_{θ} de tijd die over de afstand onder hoek θ werd gedaan.

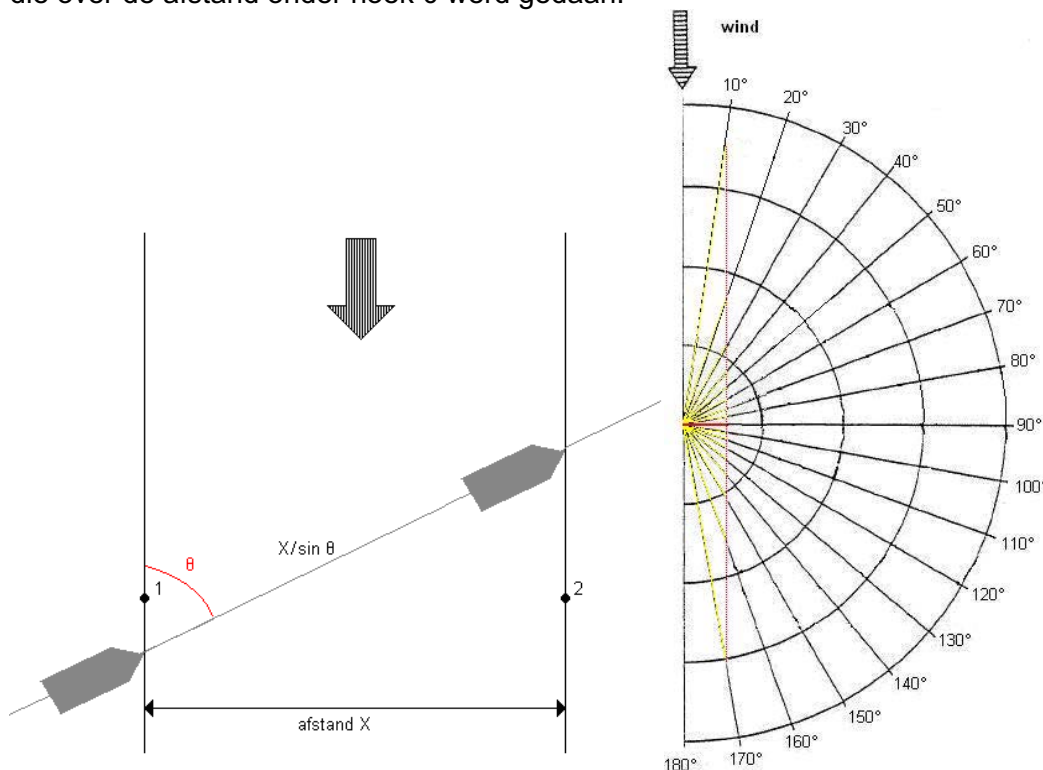


Fig 3.1.4: De methode om de afgelegde afstand te bepalen bij een vaste X.

Fig 3.1.5: De afstanden zijn per koers enorm verschillend, daardoor is de verwachting dat de tijd waarschijnlijk hoger zal zijn.

θ°	Radialen	$1/\sin(x)$	Afstand X	tijd	m/s	Knoop
0°	0 π	-----	0.0000	Niet zeilbaar	Afstand/tijd	0.5144*m/s
10°	1/18 π	5.7587	2015.57	Niet zeilbaar	Afstand/tijd	0.5144*m/s
20°	1/9 π	2.9238	1023.33	Niet zeilbaar	Afstand/tijd	0.5144*m/s
30°	1/6 π	2.0000	700.00	Niet zeilbaar	Afstand/tijd	0.5144*m/s
40°	2/9 π	1.5557	544.50	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
50°	5/18 π	1.3054	456.89	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
60°	1/3 π	1.1547	404.14	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
70°	7/18 π	1.0641	372.46	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
80°	4/9 π	1.0154	355.39	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
90°	1/2 π	1.0000	350.00	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
100°	5/9 π	1.0154	355.39	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
110°	11/18 π	1.0641	372.46	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
120°	2/3 π	1.1547	404.14	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
130°	13/18 π	1.3054	456.89	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
140°	7/9 π	1.5557	544.50	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
150°	5/6 π	2.0000	700.00	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
160°	8/9 π	2.9238	1023.33	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
170°	17/18 π	5.7587	2015.57	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s
180°	1 π	-----	0.0000	seconden	Afstand/tijd	0.5144*m/s

Tabel 3.1.6: Na invoer van de tijd geeft deze tabel de $F(\theta)$ bepalen voor de ingevoerde koersen.

Door de verderop genoemde nadelen van testen op de Kagerplassen kon er bijna geen nauwkeurige en realistische resultaten verkregen worden. Het enige betrouwbare resultaat dat is gevonden is de scherpste koers die met de BM gevaren kon worden, dit was een hoek van 35° met de wind. De aangenomen α van 30° uit hoofdstuk twee komt hiermee redelijk overeen.

De nadelen van testen op de Kagerplassen zijn:

- * Door de vele eilanden gaat de wind soms om de eilanden heen en is de windrichting niet constant.
- * Er wordt veel gezeild, hierdoor is het traject in een slag afleggen niet altijd haalbaar, soms moet er voorrang worden verleend.
- * Het is geen zee, waar de wind constanter is en niet af en toe wegvalt.
- * Het grootzeil en fok in de juiste stand houden, de tijd bijhouden is alleen te doen, echter de koers moet constant zijn hiervoor is een tweede persoon nodig die precies weet hoe koers gehouden moet worden. Helaas was mijn "ballast" niet dusdanig ervaren, zodat het onbekende schip tijdens het traject steeds op meer dan één koers werd gevaren.

De volgende fotoserie, ter illustratie, geeft een beeld van hoe de zeilen met verschillende koersen staan en hoe het weer op de testdag was. Op de eerste twee foto's, serie 3.1.7 is zeilklaar maken en het overstag gaan te zien.



Fig 3.1.7: Van links naar rechts vaarklaar maken, in de wind.

Op de linkerfoto hieronder is een overleg te zien over de haalbaarheid van deze testactie en op de rechterfoto is het zeilschip onder ruime wind vaart.



Fig 3.1.8 : Van links naar rechts overleg, ruime wind.

De volgende twee foto's (serie 3.1.9) zijn gemaakt tijdens aan de wind koersen, met zeilen over stuurboord op de linker foto en over bakboord op de rechter foto.



Fig 3.1.9 : Van links naar rechts aan de wind, aan de wind.

3.2 Duitse schepen

De Duitse schepen die zijn bekeken om de modellen uit hoofdstuk twee te valideren zijn de Carola uit 1600 en het Dynaschiff uit 1972. De gegevens van deze schepen zijn gevonden in de literatuur en geven de $F(\theta)$ voor verschillende windkrachten.

3.2.1 Galei Schip Carola

In 1984 is een onderzoek gedaan door de hogeschool van Bremen, hierbij werden de snelheidsgegevens gevonden van zeilschip Carola uit 1600. De snelheid van het Duitse galeischip Carola is afhankelijk van de invalshoek van de wind.

In figuur 3.2.1.3 is deze snelheid te zien per windkracht. Om de optimale hoek θ^* te bepalen moet de onderstaande $u(\theta)$ worden geminimaliseerd.

$$u(\theta) = a \cdot \sec(\theta) / F(\theta) \quad \{3.2.1.1\}$$

de optimale hoek θ^* is dan:

$$\theta^* = \min_{\theta} u(\theta) \quad \{3.2.1.2\}$$

In figuur 3.2.1.3 is de functie $F(\theta)$ te zien, afhankelijk van de invalshoek van de wind voor de verschillende windkrachten.

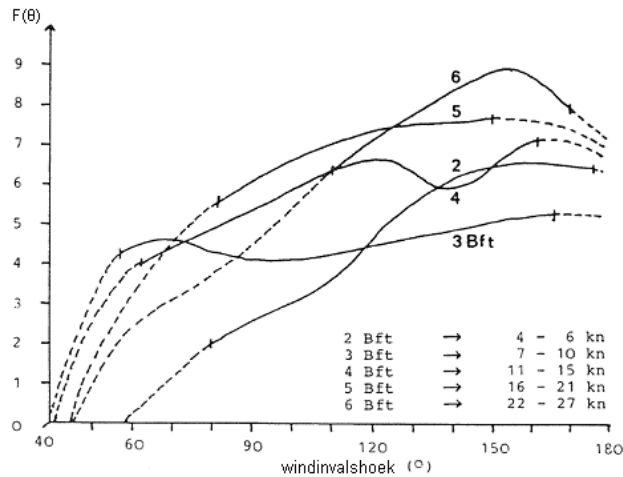


Fig 3.2.1.3:: De snelheid van Galeischip Carola uit 1600 weer ten opzichte van de hoek met de wind, per windkracht verschilt de vorm van de lijn (bron: [3]).

In figuur 3.2.1.4 is de tijd die het kost om een zeemijl af te leggen in uren te zien, deze is afhankelijk van de koers evenals de windkracht. In dit figuur heeft het schip een eindbestemming dat *in de wind* ligt om de verschillende afstanden te kunnen berekenen.

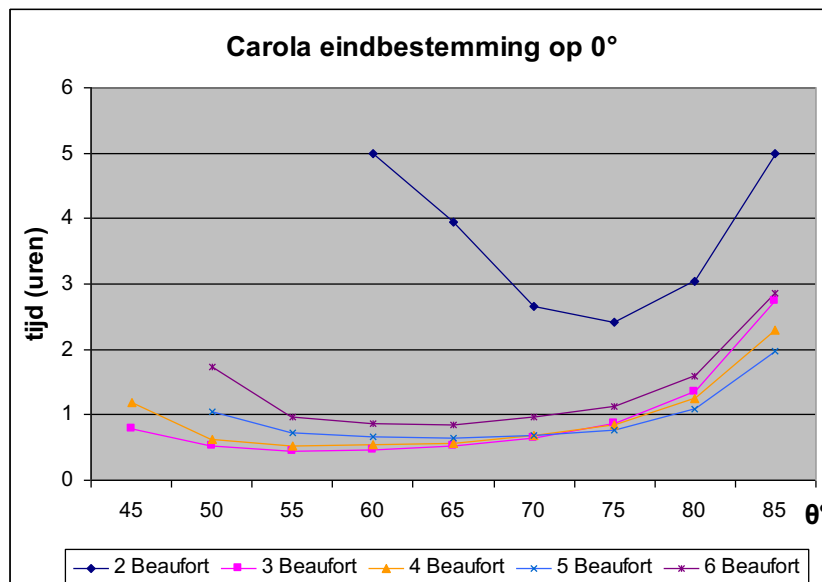


Fig 3.2.1.4: De tijd die het zeilschip Carola kost om op een eindbestemming op één mijl afstand te bereiken ten opzichte de koers per windkracht, waarbij de eindbestemming op 0° op één mijl ligt.

Twee dingen vallen op aan dit figuur, als eerste dat de optimale koers voor de windkrachten drie, vier, vijf en zes nagenoeg gelijk is in tegenstelling tot 2 Beaufort. Ook heeft bij windkracht twee de lijn een V-vorm en bij drie, vier, vijf en zes Beaufort is deze lijn vlakker. Bij windkracht drie, vier, vijf en zes maakt het niet precies volgen van de optimale koers minder uit in tijd.

Voor de verschillende windkrachten verschilt ook de optimaal te varen koers. Met een eindbestemming *in de wind* zijn de volgende hoeken optimaal:

Windkracht 2	Windkracht 3	Windkracht 4	Windkracht 5	Windkracht 6
75°	55°	55°	65°	65°

De constanten a en b uit het kwadratisch model kunnen voor elke windkracht worden berekend voor de zeilschip Carola, de waarden die dan als optimale koers worden gevonden zijn dan:

	Windkracht 2	Windkracht 3	Windkracht 4	Windkracht 5	Windkracht 6
Constanten uit het kwadratisch model	$a = 7.8$ $b = -5.6$	$a = 22.8$ $b = -27.2$	$a = 17.8$ $b = -18.4$	$a = 14$ $b = -8$	$a = 11.6$ $b = -9.6$
Optimale koers	70°	55°	55°	60°	60°
verschil	5°	0°	0°	5°	5°

Bij windkracht drie en vier geeft de Carola de optimale koers die gevonden is in het kwadratische model. Ook bij windkracht twee, vijf en zes ligt de werkelijke optimale koers dichtbij de gevonden optimale koers in het kwadratische model.

In figuur 3.2.1.5 is de functie $u(\theta)$ te zien, afhankelijk van de invalshoek van de wind en de windkracht. Het schip heeft een eindbestemming die *aan de wind* ligt, dit om de verschillende afstanden te kunnen berekenen.

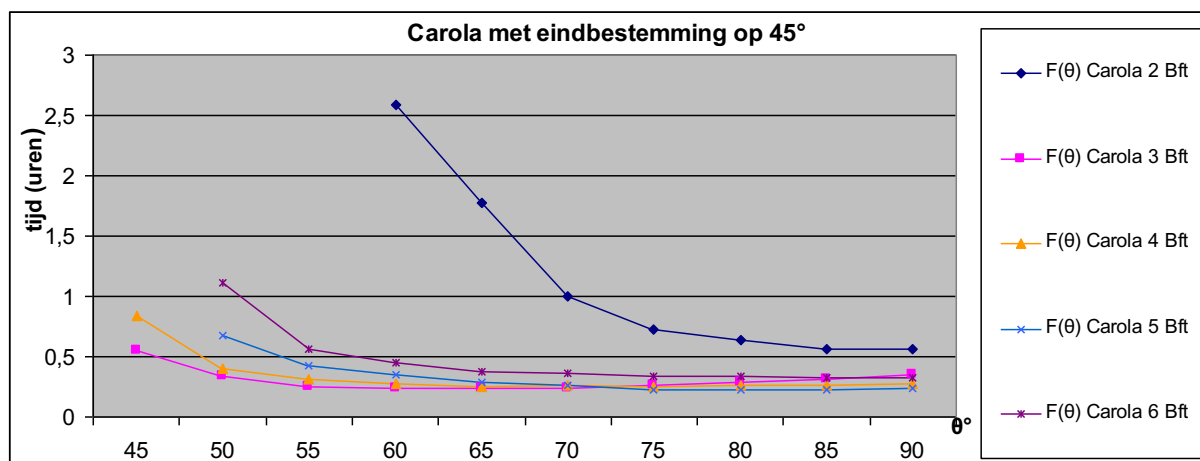


Fig 3.2.1.5: De tijd die het zeilschip Carola kost om op een eindbestemming te bereiken ten opzichte de koers per windkracht, waarbij de eindbestemming op 45° op één mijl ligt.

Wat opvalt in dit figuur is dat vooral bij drie, vier, vijf en zes Beaufort is de tijdslijn vlak is. Bij windkracht drie, vier, vijf en zes maakt het niet precies volgen van de optimale koers niet veel uit in tijd.

Voor de verschillende windkrachten verschilt ook de optimaal te varen koers. Met een eindbestemming *aan de wind* zijn de volgende hoeken optimaal:

Windkracht 2	Windkracht 3	Windkracht 4	Windkracht 5	Windkracht 6
90°	65°	75°	85°	85°

De Carola geeft hier een ander optimale koers dan bij de theoretische modellen gevonden zijn, dit zou onder andere kunnen komen doordat de α van de Carola hoger ligt dan 30° .

	Windkracht 2	Windkracht 3	Windkracht 4	Windkracht 5	Windkracht 6
Constanten uit het kwadratisch model	a = 7.8 b = -5.6	a = 22.8 b = -27.2	a = 17.8 b = -18.4	a = 14 b = -8	a = 11.6 b = -9.6
Optimale koers	85°	60°	60°	75°	70°
verschil	5°	5°	15°	10°	15°

Bij windkracht twee en drie ligt de werkelijke optimale koers dichtbij de gevonden optimale koers in het kwadratische model.

3.2.2 Duits zeilvrachtschip

In 1984 is onderzoek gedaan door de hogeschool van Bremen, hierbij werden de snelheidsgegevens gevonden van zeilschip het Dynaschiff uit 1972. De snelheid van een Duitse bulkcarrier (Dynaschiff) is afhankelijk van de invalshoek van de wind. Dit scheepstype is ontstaan toen de olieprijs eind jaren zeventig erg hoog waren. Het is een vrachtschip van meer dan 100 meter met zes masten. In figuur 3.2.2 te zien per windsnelheid, dit type schip kan niet scherper dan 48° richting de wind varen.

Om de optimale hoek θ^* te bepalen moet de onderstaande $u(\theta)$ worden geminimaliseerd. Zie functies 3.2.1.1 en 3.2.1.2.

In figuur 3.2.2.3 is de functie $F(\theta)$ te zien, afhankelijk van de invalshoek van de wind en de windkracht.

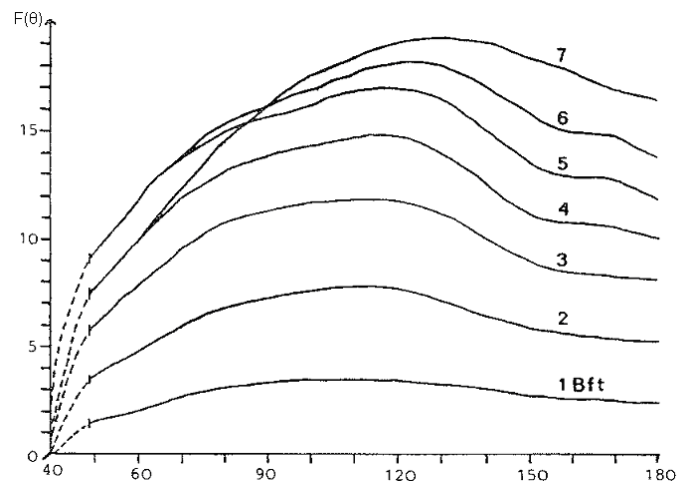


Fig 3.2.2.3: De snelheid van het Dynaschiff uit 1972 weer ten opzichte van de hoek met de wind, per windkracht verschilt de vorm van de lijn (bron: [3]).

In figuur 3.2.2.4 is de tijd te zien die het Dynaschiff over een zeemijl doet te zien, afhankelijk van de koers en de windkracht. Het schip heeft een eindbestemming dat *in de wind* ligt om de verschillende afstanden te kunnen berekenen. Omdat bij windkracht één, twee en drie de tijd om op de eindbestemming aan te komen vele malen hoger ligt dan bij een hogere windkracht, is in figuur 3.2.2.5 voor de windkrachten vier tot en met zeven de snelste koerstijden te zien.

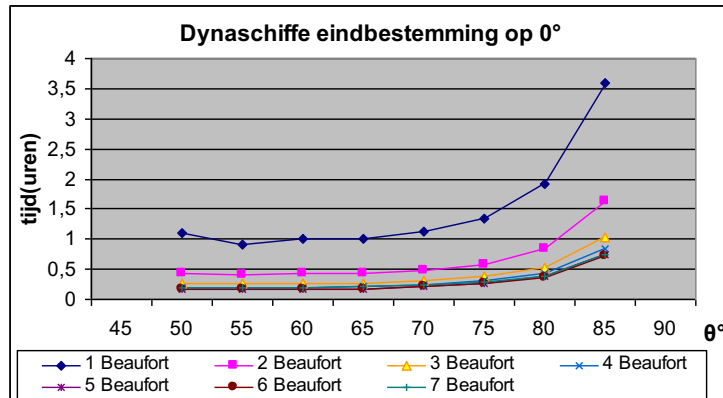


Fig 3.2.2.4 : De tijd die het een Dynaschiff kost om op een eindbestemming te bereiken met de eindbestemming op 0°.

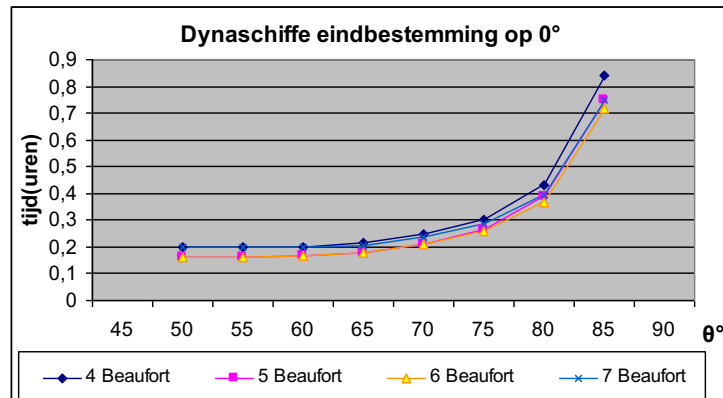


Fig 3.2.2.5 : De tijd die het een Dynaschiff kost om op een eindbestemming te bereiken met de eindbestemming op 0°.

Wat opvalt in de figuren is dat de tijdslijn vlak is tot ongeveer 75° en daarna sterk stijgt. Het niet precies volgen van de optimale koers maakt niet veel uit in tijd.

Voor de verschillende windkrachten verschilt ook de optimaal te varen koers. Met een eindbestemming *in de wind* zijn de volgende hoeken optimaal:

Windkracht	Windkracht	Windkracht	Windkracht	Windkracht	Windkracht	Windkracht
1	2	3	4	5	6	7
55°	55°	55°	55°	50°	50°	55°

De constanten a en b uit het kwadratisch model kunnen voor elke windkracht worden berekend voor het Dynaschiff, de waarden die dan als optimale koers worden gevonden zijn dan:

Windkracht	1 Bft	2 Bft	3 Bft	4 Bft	5 Bft	6 Bft	7 Bft
Constanten uit het kwadratisch model	a = 10.2 b = -8.8	a = 24.4 b = -22.4	a = 42.6 b = -44	a = 54.4 b = -57.6	a = 66.6 b = -74.4	a = 66 b = -72	a = 53 b = -52
Optimale koers	55°	55°	55°	55°	55°	55°	55°
verschil	0°	0°	0°	0°	5°	5°	0°

Bij windkracht één, twee, drie, vier en zeven geeft het Dynaschiff de optimale koers die gevonden is in het kwadratische model. Ook bij windkracht vijf en zes ligt de werkelijke optimale koers dichtbij de gevonden optimale koers in het kwadratische model.

In figuur 3.2.2.6 is wederom te zien, afhankelijk van de koers en de windkracht, ditmaal heeft het schip een eindbestemming dat *aan de wind* ligt, om de verschillende afstanden te kunnen berekenen. Omdat bij windkracht één en twee de tijd om op de eindbestemming aan te komen vele malen hoger ligt dan bij een hogere windkracht, is in figuur 3.2.2.7 voor de windkrachten drie tot en met zeven de snelste koerstijden te zien.

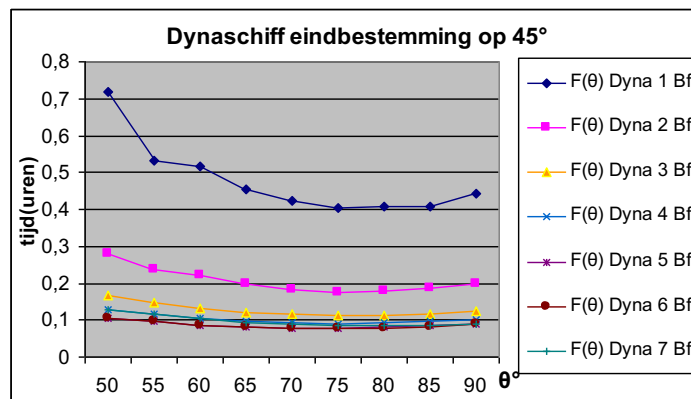


Fig 3.2.2.6 : De tijd die het een Dynaschiff kost om op een eindbestemming te bereiken ten opzichte de koers per windkracht, waarbij de eindbestemming op 45° op één mijl ligt.

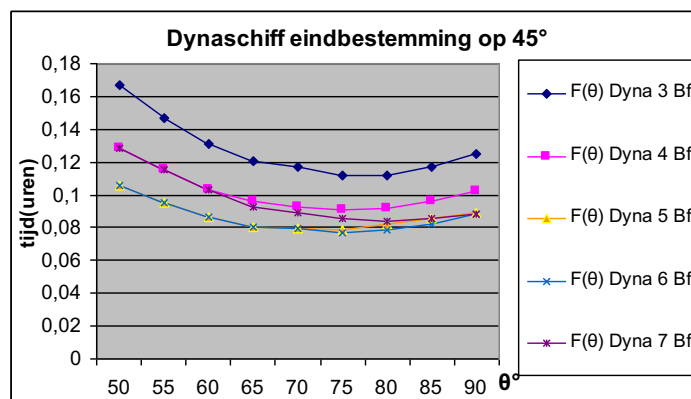


Fig 3.2.2.7 : De tijd die het een Dynaschiff kost om op een eindbestemming te bereiken ten opzichte de koers per windkracht, waarbij de eindbestemming op 0° op één mijl ligt.

Wat opvalt in de figuren is dat de tijdslijn vlak is. Het niet precies volgen van de optimale koers maakt niet veel uit in tijd, voor windkracht één en twee Beaufort zijn de verschillen in tijd groter.

Voor de verschillende windkrachten verschilt ook de optimaal te varen koers. Met een eindbestemming *halve wind* zijn de volgende hoeken optimaal:

Windkracht	Windkracht	Windkracht	Windkracht	Windkracht	Windkracht	Windkracht
1	2	3	4	5	6	7
75°	75°	75°	75°	75°	75°	80°

Windkracht	1 Bft	2 Bft	3 Bft	4 Bft	5 Bft	6 Bft	7 Bft
Constanten uit het kwadratisch model	a = 10.2 b = -8.8	a = 24.4 b = -22.4	a = 42.6 b = -44	a = 54.4 b = -57.6	a = 66.6 b = -74.4	a = 66 b = -72	a = 53 b = -52
Optimale koers	65°	65°	60°	60°	60°	60°	60°
verschil	10°	10°	15°	15°	15°	15°	20°

Het Dynaschiff geeft hier een ander optimale koers dan bij de theoretische modellen gevonden zijn, dit zou onder andere kunnen komen doordat de α van het Dynaschiff veel hoger ligt dan 30°.

4 Samenvatting

In dit werkstuk is onderzocht met behulp van wiskundige modellen wanneer je met de *aan de wind* koers van een zeilschip de zeilen beter kunt strijken en op de motor verder varen en wat de meest optimale koers is. Deze optimale koers om te varen verschilt per type zeilschip. Indien de aanname wordt gemaakt dat voor elk type schip de snelheid gelijk is aan een lineair model, dan kan de optimale koers worden berekend. Deze optimale koers is afhankelijk van de scherpste koers waarmee het schip kan varen.

4.1 Conclusies

De kwadratische benadering is nauwkeuriger in het berekenen van de optimale koers, dan het lineaire benadering. Dit komt omdat in de lineaire benadering de scherpst mogelijk te varen hoek altijd een zelfde optimale koers geeft.

Indien het schip een motor heeft, dan kan deze het schip een extra snelheid geven. Voor sommige koersen, afhankelijk van de hoek van de wind met de kortste koers, kan op de motor varen en de zeilen laten zakken sneller zijn. Onder de scherpste koersen is alleen op *motor* varen het snelst. Dit is als het eindpunt tussen 0° en β° ligt, waarbij β° de koers is waarbij de tijd om met motor en zeil te varen en alleen met motor varen gelijk is. Het varen met motor en zeilen is sneller indien de koers niet te scherp en maximaal de optimale koers voor met motor en zeilen is. Dit zijn de koersen waarbij het eindpunt tussen de motorkoers β° en de optimale zeil en motor koers θ^* . Het eindpunt wordt het snelst bereikt als de koers van θ° wordt gevaren. Bij koersen die ruimer dan de optimale met *motor en zeilen* koers zijn, gaat met *motor en zeilen* verder varen sneller met als richting een directe lijn naar de eindbestemming.

4.2 Aanbevelingen

Van elk schip kan een optimale koers worden benaderd. In dit werkstuk hangt deze van de snelheid per koers af. De snelheid per koers hangt echter van de windkracht af: het is beter om per windkracht de optimale koers te bepalen dan een gemiddelde te nemen. Bij een lange afstand heeft dit meer invloed op de tijd dan bij kortere afstand. Hoe langer er wordt gevaren, des te groter de kans op een verandering binnen de wind. Bij weinig wind is het belangrijker om de optimale koers te varen dan bij sterke wind.

Voor de eindbestemming die recht tegen de wind in ligt komen de theoretische modellen redelijk overeen met de gevonden waarden in de praktijk, bij andere koersen is dit niet het geval.

Voor vervolgonderzoek zou het interessant zijn om met meerdere boten te experimenteren om het model beter te valideren, tevens zou meer onderzoek kunnen worden gedaan naar de optimale koers indien de wind niet recht van voren komt.

Bronvermelding

- [1] Sailing to Windward, the American Mathematical Monthly, Vol. 23, No. 10, December 1916 pp. 368-371, W.E. Byerly.
- [2] CWO Zeilinstructieboek kielboot I, II & III, tweede druk maart 2005, Edwin Moerkerk, Mark Ruijs, Sailmaster production.
- [3] Das routen von Segelschiffen, Reisenachbetrachtung einer Regatta und vergleich mit dem Dynaschiff, Abschlußarbeit an den Hochschule Bremen Fachbereid Nautik, Ingo Rieger, 1984.
- [4] Wind Power for Ships-A General Survey, Air Commodore C.T. Nance, Symposium on wind propulsion of commercial ships, Royal Institution of Naval Architects, London Nov. 1980.
- [5] On the Power Savings by an Auxiliary Kite Propulsion System, P. Naaijen, V. Koster, R.P. Dallinga, 2006.
- [6] nl.Wikipedia.org / en.wikipedia.org
- [7] wikimedia.org
- [8] www.maps.google.nl