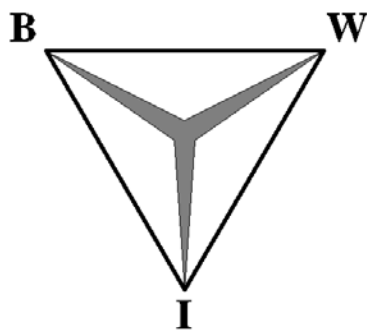


**Minder voorraden door
*Vendor Managed Inventory (VMI)***



BWI-Werkstuk

H.T. Nguyen

Faculteit der Exacte Wetenschappen
Studierichting Bedrijfswiskunde & Informatica
De Boelelaan 1081
1081 HV Amsterdam
Amsterdam, 9 januari 2003



Voorwoord

De opleiding Bedrijfswiskunde & Informatica (BWI) is een multidisciplinaire opleiding, het is gericht op het toepassen van een combinatie van Wiskunde, kwantitatieve en informatietechnologische methoden, om bijvoorbeeld bedrijfsprocessen te verbeteren.

Als een BWI-student schrijf ik een BWI-werkstuk in de laatste fase van deze opleiding. Naar de aanleiding van een probleemstelling doet een student een onderzoek. Vaak zullen de bronnen van het onderzoek literatuur zijn, maar kan ook een computerprogramma zijn. De student legt de resultaten schriftelijk vast en geeft een mondelinge presentatie daarover.

Op basis van een wiskundige methode zou ik de voorraadpolitiek opstellen voor een leverancier, die een samenwerkingstrategie met zijn klanten heeft. Ik heb dit onderwerp gekozen want het heeft betrekking op mijn Wiskunde en Economie vakken in mijn opleiding, bovendien een praktische toepassing in de logistieke keten.

Lezers, die geïnteresseerd zijn in de inhoud van de samenwerking tussen partijen in de logistieke keten en de mogelijke vormen van deze samenwerking, worden verwezen naar het hoofdstuk 2. Als men slechts geïnteresseerd is in de samenwerking tussen leverancier en afnemers op het gebied van voorraadbeheer, dan is het hoofdstuk 3 van belang. Hoofdstuk 4 geeft een raad voor het bepalen van de minimalisatie van totale kosten in de keten, daardoor is het vooral van belang voor een leverancier. Wie ten slotte vooral belang stelt in de uitwerkingen van dit wiskundige model, kan volstaan met het lezen van de Bijlagen.

Ten slotte dank ik de volgende personen die me geholpen hebben bij het totstandkomen van dit BWI-werkstuk.

- M. Maëla voor de aanleiding van een BWI-werkstuk
- G.J. Franx voor het vaststellen van het onderwerp en de begeleider
- S. Bhulai voor zijn hulp bij het zoeken naar de literatuurbronnen
- R. Szwarttouw voor het terugvinden de wiskundige theorie in de oude dictaten.

Amsterdam, 9 januari 2003
H.T. Nguyen

Samenvatting

Door de snelle technologische ontwikkeling en de hoge concurrentie is een onderneming op zoek naar samenwerking met andere partij in de logistieke keten om zich van andere concurrenten te onderscheiden. Er gaan dus ketens van de ondernemingen ontstaan, waarbij iedere onderneming een deel van de keten voor zijn rekening neemt.

Onder de naam ketenintegratie ofwel *Supply Chain Management* (SCM) werken verschillende onafhankelijke organisatorische entiteiten in een logistieke keten samen. SCM houdt zich bezig met afstemmingsvraagstukken tussen twee of meer ondernemingen om hun resultaten te verbeteren en hun duurzaam concurrentievoordeel te bereiken.

In de integratie tussen bedrijven onderscheiden we vier mogelijke vormen. Deze indeling is gebaseerd op een studie van de Vereniging Logistiek Management. Vier integratievormen zijn:

1. **Fysieke integratie** is de standaardisatie van de fysieke goederenstroom in de keten
2. **Informatie integratie** is de afstemming van informatiestromen in de keten
3. **Besturingsintegratie** is de zichtbaarheid in voorraadbeschikbaarheid, verkoopprognoses en verkoopvolume in de keten
4. **Grondvormintegratie** is de centralisatie van besluitvorming in de keten. Een gedeelte van de aansturende activiteiten wordt bij een andere partij gelegd. De bepaalde beslissingen kunnen voor meerdere schakels in de keten door één partij worden genomen. Een bekend voorbeeld hiervan is *Vendor Managed Inventory* (VMI), hierbij heeft de leverancier toegang tot de systemen van zijn afnemers om inzicht te krijgen in de vraag en de voorraad.

De moderne onderneming heeft vooral oog voor wat zich logistieke ontwikkeling afspeelt buiten de muren van het eigen bedrijf om de grote fluctuaties in de vraag te voorkomen. De markten worden steeds openers en dat geldt ook voor de relaties met leveranciers en afnemers. De leverancier heeft zelf de verantwoordelijkheid voor het bijhouden van de voorraad voor zijn afnemers, wanneer de voorraad van de detailhandel laag zijn, worden de producten nu automatisch door de leverancier aangevuld. Vakterm voor deze samenwerking is *Vendor Managed Inventory* (VMI).

Stel, een groep van afnemers in een geografische regio plaatsen in willekeurige volgorde een order van één eenheid product bij de leverancier. De leverancier kan niet zomaar op elk moment van de dag elk willekeurig aantal product verzenden, maar hij moet die veel kleine orders van de klanten combineren tot één *periodiek* ofwel *economische* zendinggrootte (denk bijvoorbeeld aan één trucklading, één pallet flessen, etc.) voordat een verzending wordt afgeleverd vanuit de voorraad van de leverancier. Als de voorraad onvoldoende is om aan een order volledig te voldoen, moet de leverancier onmiddellijk een bestelling plaatsen bij de fabrikanten. In deze aanname wordt er vanuit gegaan dat de fabrikant altijd aan de gewenste bestelhoeveelheden van de leverancier kan voldoen. De *levertijd*, die nodig is voor een voorraadaanvulling, is verwaarloosbaar, zodat een geconsolideerde aflevering op tijd kan plaatsvinden. De voorraad is vlak na de aanvulling weer gelijk aan een maximaal voorraadniveau.

Op basis van de wiskundige methode zullen we de voorraadpolitiek opstellen voor de leverancier. Met behulp van deze voorraadpolitiek kan een leverancier bepalen *hoe de verzendingfrequentie is* en *hoe groot het maximale voorraadniveau is* om de totale kosten te minimaliseren. Dit voorraadmodel is de coördinatie tussen transport- en voorraadbeslissingen, ofwel de afweging tussen vier soorten kosten, te weten inkoopkosten, voorraadkosten, vervoerkosten en de kosten van nee-verkoop om minimaal totale kosten te behalen.

Inhoudsopgave

Voorwoord	2
Samenvatting	3
Inhoudsopgave	4
1. Inleiding	6
2. Ketenintegratie	7
2.1 Definities over Supply Chain Management (SCM).....	7
2.2 Vier vormen van ketenintegratie.....	10
2.3 Cross-docking distributie.....	11
3. Wat is VMI?	12
3.1 Achtergrond van VMI.....	12
3.2 Definities over VMI.....	12
3.3 Eisen voor effectief VMI	13
3.4 Voor- en nadelen van VMI	13
4. Voorraadpolitiek voor VMI systeem.....	14
4.1 Inleiding.....	14
4.2 Probleembeschrijving	15
4.3 Probleemformulering	16
4.3.1 Verwachte bestelkosten.....	17
4.3.2 Verwachte vervoerkosten.....	18
4.3.3 Verwachte voorraadkosten.....	18
4.3.4 Verwachte kosten nee-verkoop	18
4.4 Gedetailleerde analyse	19
4.4.1 De uitdrukking van de totale kostenfunctie.....	19
4.4.2 De Oplossingen	20
4.5 Numerieke resultaten en conclusie	22
5. Praktijksituaties	25
Literatuurlijst.....	28
Bijlagen A: kostenfactors met vernieuwingsproces	29
A.1 Vernieuwingsproces.....	29
A.2 Verwacht aantal periode in een cyclus.....	30
A.3 Verwachte gemiddelde voorraden $H(Q,T)$	30
A.4 Verwachte gemiddelde wachttijd $W(T)$	31
Bijlagen B: kostenfactors in de Poisson proces.....	33
B.1 Vernieuwing Poisson proces	33
B.2 Bepalen $E[K]$	33
B.3 Bepalen $M_G(Q)$	34
B.4 Bepalen $m_G(Q)$	34
B.5 Bepalen $H(Q,T)$ Poisson proces.....	34
B.6 Bepalen $W(T)$ Poisson proces.....	35

Bijlagen C: oplossingen voor voorraadmodel	37
C.1 Bepalen optimale $C(\bar{Q}, T)$ en $C(\bar{Q})$	37
C.2 Bepalen Hessian & Determinant van $C(\bar{Q}, T)$	39
C.4 Bepalen grenzen van Q^*	40
C.5 Schatting voor Q^* m.b.v. EOQ-formule	40

1. Inleiding

Alles wat winkels vandaag bestellen wordt morgen goed afgeleverd, precies op het moment dat de klant erom vraagt. Albert Heijn noemt dit systeem Vandaag Voor Morgen (VVM). Een individuele onderneming is in staat niet meer om op eigenkracht aan deze eisen van de klanten te kunnen voldoen. Het gevolg hiervan is een golf van coalities, fusies en ketenintegratie. Er gaan dus ketens van de ondernemingen ontstaan, waarbij iedere onderneming een deel van de keten voor zijn rekening neemt.

Onder de naam ketenintegratie of *Supply Chain Management* (SCM) werken diverse onafhankelijke organisatorische entiteiten in een logistieke keten samen, deze organisaties zijn actief in één van de fasen van het proces dat loopt van grondstoffenverwerking tot het verdelen van eindproducten aan de consument. Ketenintegratie houdt zich bezig met afstemmingsvraagstukken tussen twee of meer ondernemingen om hun resultaten te verbeteren en hun duurzaam concurrentievoordeel te bereiken.

Verbeteringen door samenwerking in de logistieke keten kunnen op verschillende gebieden op verschillende wijzen tot stand komen. Een belangrijk aandachtsgebied betreft het voorraadbeheer tussen een leverancier en zijn afnemers. De leverancier heeft zelf de verantwoordelijkheid voor het bijhouden van de voorraad voor zijn afnemers. Vakterm voor deze samenwerking is *Co-Managed Inventory* (CMI) ofwel *Vendor Managed Inventory* (VMI).

Op basis van de wiskundige methode zullen we de voorraadpolitiek opstellen voor de leverancier. Met behulp van deze voorraadpolitiek kan de leverancier bepalen *hoe vaak hij aan zijn klanten moet leveren én hoe groot het maximale voorraadniveau is* om de totale kosten in de keten te minimaliseren. Dit werkstuk zal een antwoord geven op de vraag *hoe een VMI-leverancier een optimaal voorraadbeheer ontwikkelt door de samenwerking met zijn afnemers*.

Allereerst beschrijven we in hoofdstuk 2 een overzicht van de logistieke keten en de samenwerking tussen de ondernemingen, daarna bespreken we de vier vormen van ketenintegratie en het middel *Cross-docking*, deze twee elementen hebben we nodig voor de te beschrijven voorraadpolitiek. In hoofdstuk 3 op basis van de samenwerking tussen leverancier en afnemers op het gebied van voorraadbeheer definiëren we de vakterm *Vendor Managed Inventory* (VMI), we hebben als doel een overzicht te geven de eisen van VMI en bovendien de voor- en nadelen van VMI. In hoofdstuk 4 modelleren we de wiskundige methode voor het bepalen van de minimalisatie van totale voorraadkosten van VMI. Met deze voorraadpolitiek kan de leverancier een planning maken voor het herbevoorraden en de verzendingfrequentie. In hoofdstuk 5 bevindt zich een paar praktijksituaties van VMI. We sluiten het werkstuk af in hoofdstuk 6 met enkele conclusies over het toepassen van VMI.

Achter in dit werkstuk zijn drie Bijlagen, daarin de nodige theorieën, stellingen en de uitwerkingen voor onze voorraadmodel zijn opgenomen. De benodigde informatie, die via literatuurstudies en websites op het Internet zijn verkregen, nemen we in de Literatuurlijst op.

Dit werkstuk is het literatuurverslag dat over de belangrijkste *Supply Chain Management*, Wiskunde, en Logistiek gaat.

2. Ketenintegratie

Managers, consultants en academici in het domein van logistiek beheer hebben de laatste jaren hun mond vol van het begrip *Supply Chain Management* (SCM). Echter, de term SCM is niet eenduidig bepaald in het dagelijkse gebruik en in de wetenschappelijke literatuur. In dit hoofdstuk geven we aan wat de SCM vandaag inhoudt.

Eerst laten we zes verschillende definities over SCM de revue passeren, uit de marketingvisie komen we met het begrip *Demand and Supply Chain Management* (DSCM) (2.2). Daarna geven we een nadere inhoud van vier mogelijke vormen van de logistieke ketensamenwerking (2.3). Ten slotte beschrijven we het *Cross-docking* concept, dat een opstap is naar de voorraadpolitiek in hoofdstuk 4 (2.4).

2.1 Definities over *Supply Chain Management* (SCM)

Er valt een aantal groot definities van SCM te onderscheiden. Zes belangrijke definities met diverse visies zullen in deze paragraaf worden besproken.

Het begrip SCM treffen we in de literatuur voor het eerste aan in 1982. Oliver & Webber bespreken in hun artikel de verschillen tussen SCM en de traditionele wijze van voorraad- en materiaalbeheersing. Ze beschrijven over SCM als volgt:

“First SCM views the supply chain as a single entity rather than delegating fragmented responsibility for various segments in the supply chain to functional areas such as purchasing, manufacturing, distribution and sales. The second distinctive feature of SCM flows directly from the first: It calls for - and in the end depends upon - strategic decision making. ‘Supply’ is a shared objective of practically every function in the chain and is of particular strategic significance because of its impact on overall costs and market share. Third SCM provides a different perspective on inventories which are used as balancing mechanism of last, not first, resort. Finally SCM requires a new approach to systems: integration, not interface, is the key.”

Uit deze eerste definitie van SCM merken we dat de keten moet worden opgevat als een *enkele entiteit*, dat de functionele grenzen intern en extern moet vervangen en dat men voorraad moet balanceren over de keten en niet per schakel (Goor, 1999).

Stevens (1989) kijkt sterk met een logistieke bril naar SCM:

“The supply chain is the connected series of activities which is concerned with planning, coordinating and controlling material, part and finished goods from supplier to the customer. The objective of supply chain is to synchronise the requirements of the customer with the flow of material from suppliers in order to effect a balance between what are often seen as the conflicting goals of high customer service, low inventory investment and low unit cost. The design and operation of an effective supply chain is of fundamental importance to every company”.

Bij productiebedrijven zoekt Stevens het vertrekpunt voor SCM en het bereiken van SCM naar de integratie van alle bedrijfsprocessen.

Christopher benadrukt SCM op het managen van ketensamenwerking met leveranciers en de klanten, zodat de klant effectief wordt bediend en de ketenkosten verminderen.

“The management of upstream and downstream relationships with suppliers and customers to deliver superior customer value at less cost to the supply chain as a whole”

In de tweede definitie geeft Christopher een breder beeld van samenwerking. Voor de samenwerking tussen partijen gebruikt Christopher niet slechts een *keten* maar een *netwerk*, om zo optimaal de

eindgebruiker te kunnen bedienen. Want de keten wordt gedreven door de markt en niet door de leveranciers.

“A network of connected and interdependent organizations mutually and co-operatively working together to control, manage and improve the flow of materials and information from suppliers to end users” (Christopher, 1998, p.18-19).

Met het idee coördinatie van beslissingen hanteren Veen en Venugopal de volgende definitie: “Het management van de keten, dat onafhankelijke klanten en de leveranciers verbindt, als ware hij een enkele entiteit met het doel om waarde te creëren en verspilling te reduceren, door vrijwillige coördinatie van doelen en activiteiten van alle organisaties in de keten” (Veen, 2001, p.37).

Deze definitie zal voornamelijk betrekking hebben op het vierde niveau van SCM, ofwel de *grondvormintegratie*, die we in paragraaf 2.2 onderscheiden.

Vervolgens ontlenen we aan het Jaarverslag van de Vereniging Logistiek Management van 1998 twee definities van SCM, daarin illustreren we de identificatie van belangrijke ‘ketengereedschappen’ (Goor, 2001).

Jan Wanner (Sara Lee – Douwe Egbert) hanteert als definitie: “Supply Chain Management is het aansturen van de goederenstroom van grondstof tot consument” (zie figuur 1).

Voor deze definitie beschikt de onderneming over het volgende ketengereedschappen:

- De terugkoppeling van de stuurinformatie tussen de schakels in de keten over productievolumen en behoefte aan grondstoffen en verpakkingen (*Efficiënt consument response*¹)
- Douwe Egbert levert de voorraden aan Albert Heijn distributiecentra (AH DC’s) (Co-makerrelatie met de afnemers)
- Douwe Egbert krijgt dagelijks de bestellingen van DC binnen
- Standaardisatie van pallets, rolcontainers en primaire verpakkingen
- De kosten worden berekend over de gehele keten.

Han Willemse (Albert Heijn B.V.) redeneert uiteraard geheel vanuit de consument: “Het management/regisseren van de hele *supply chain* van grondstof tot consumptie moet op zodanige wijze geschieden, dat er een balans ontstaat tussen toegevoegde waarde en ketenkosten, zowel in evenwichtssituatie als in onbalanssituatie, waardoor de consumentenvraag optimaal wordt bediend”.

Voor deze definitie zijn het volgende instrumentaria nodig:

- Inzicht/transparantie van de klantenvraag
- Inzicht en kennis van de ketenvoorraden
- Inzicht in ketenkosten en *activity based costing*²
- Inzicht in logistieke middelen, gereedschappen en vakkennis.

Wij zijn van mening dat de term *supply* een sterke associatie oproept met de gedachte dat SCM alleen betrekking heeft op het managen van de relaties met toeleveranciers. Vanuit de klantenperspectief opteren we ervoor om te starten vanuit *demand* management en daarmee stellen we *ketenomkering*. Het begrip *Demand Chain Management* (DCM) is zeer sterk in opkomst want binnen een werkelijke marketingvisie is *demand chain* realistischer. Vandaar, dat een combinatie van *supply* en *demand* het beste de praktijk representeert (Goor, 2001).

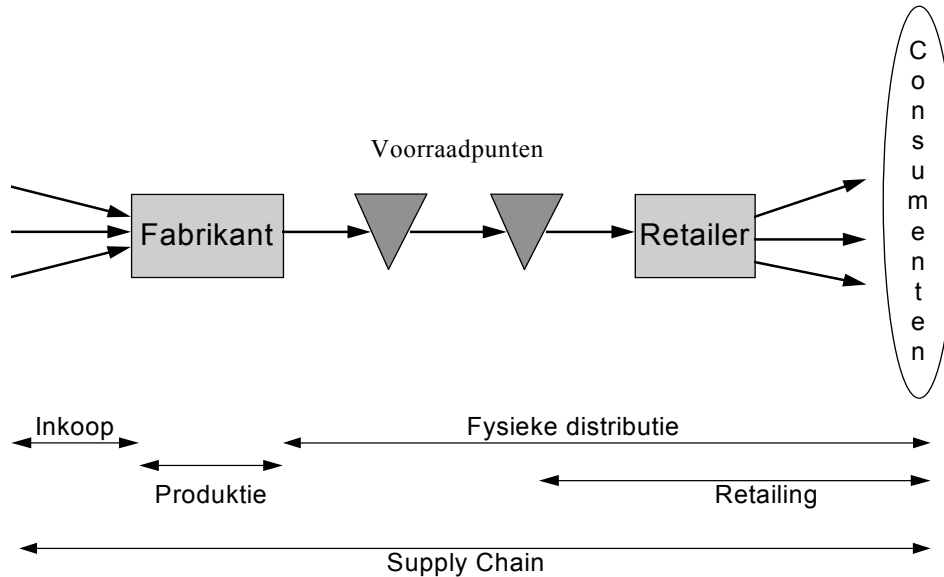
Bovendien verwachten we het komen van meerdere leveranciers en klanten in de markt, dus is er meer sprake van een *netwerk* dan een *keten*. Beide elementen samen, marktgerichtheid enerzijds en de netwerkstructuur anderzijds, spreken we vandaag over *Demand en Supply Network* (zie figuur 2)

¹ *Efficiënt consument response* is bijvoorbeeld de afspraak tussen Grolsch en Albert Heijn. Grolsch krijgt ten behoeve van de aansturing van zijn eigen processen de beschikking over de voorraadhoogte van Grolsch’ bier bij Albert Heijn.

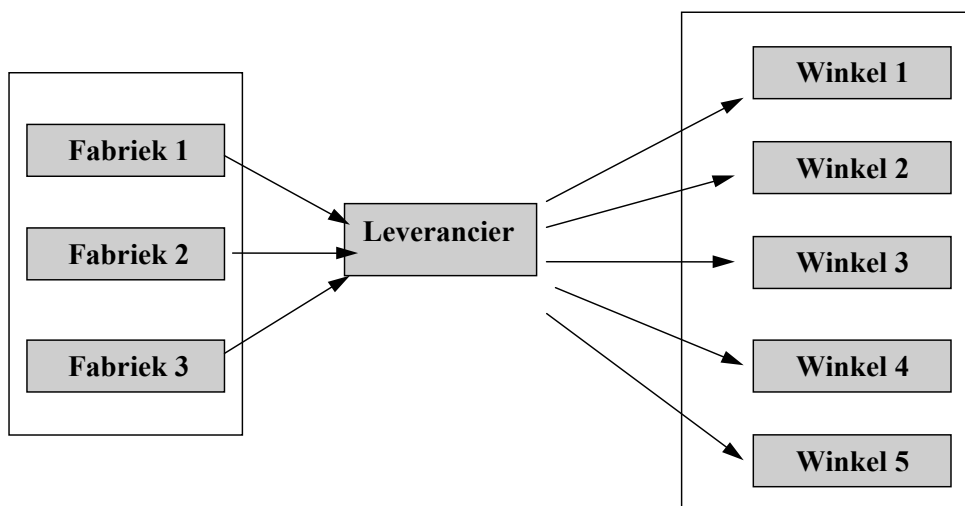
² *Activity based costing* geeft inzicht in de kosten van activiteiten in de keten of de eigen onderneming. Men kan hiermee de financiële consequenties van veranderingen berekenen.

(Christopher, 1998, p.18). Op basis van deze gedacht heeft het *Center for Supply Chain Management* van de Universiteit Nijmegen de volgende definitie opgesteld:

“Demand and supply chain management (DSCM) is the management of a network that links customers and suppliers as one “single entity” with the objectives to create value and reduce waste through the voluntary integration and coordination of the objectives of three or more -and ideally, all the - independent parties in the network” (Goor, 2001).



Figuur 1: De supply chain



Figuur 2: Een demand en supply netwerk

We hanteren het concept SCM in dit werkstuk als een synoniem voor ketenintegratie. We citeren: “Ketenintegratie of *Supply Chain Management* is in feit een logische stap binnen de ontwikkeling van

de logistiek” (Goor, 1999, p.420). Ketenintegratie heeft tot doel de logistieke prestatie van een onderneming te verbeteren door:

Het verlagen van de kosten in overleg met aangrenzende schakels binnen de keten. Daarbij wordt gekeken naar de mogelijkheden om de logistieke processen beter op elkaar aan te laten sluiten. Tevens wordt gekeken naar de mogelijkheden om overbodige handelingen te voorkomen. De activiteiten concentreren zich op het verbeteren van de effectiviteit en efficiency van de *bestaande interne bedrijfsprocessen*.

Het verhogen van de *klantentevredenheid*³. De aandacht richt op de prestatie van het bedrijf in de markt. Vooral afstemmingsmogelijkheden met andere schakels in de keten worden geanalyseerd. Doel daarvan is de kwaliteit van het product te verbeteren, bijvoorbeeld door het verbeteren van de leverbetrouwbaarheid door gebruik te maken van informatie die stroomafwaarts uit de keten wordt gehaald.

We sluiten deze paragraaf af met een volgend kenmerk van ketenintegratie:

Het begrip ketenintegratie moet niet verward worden met het begrip integratie uit de marketingtheorie. Daar wordt integratie gedefinieerd als een vorm van verticale overname in een distributiekanaal. Als de producent de groothandelsfunctie overneemt spreekt de marketingtheorie over *voorwaartse integratie*. Neemt de groothandel de productiefunctie erbij over, dan is er sprake van *achterwaartse integratie*;

Het is geen een vorm van fusie of overname maar een vrijwillige vorm van samenwerking. Daarbij probeert men de gehele keten te besturen, onder de veronderstelling dat er geen ‘muren’ zijn tussen de verschillende schakels, de keten moet worden beheerd als een *enkele entiteit* (Goor, 1999).

2.2 Vier vormen van ketenintegratie

In de praktijk zien we een groot aantal verschijningsvormen van ketenintegratie. Een vorm van ketenintegratie kan ontstaan door een beslissing om samen met leveranciers of afnemers een standaardpallet te gaan gebruiken. Maar er is ook sprake van een vorm van ketenintegratie als de bedrijven een gedeelte van hun logistieke besturingsactiviteiten overdragen aan een derde. Het zal duidelijk zijn dat de laatste vorm grotere gevolgen heeft voor de onderneming dan de eerste.

Een werkgroep van de Vereniging Logistiek Management heeft een viertal vormen van SCM in kaart gebracht. Het betreft de volgende vormen (Goor, 1999):

Fysieke integratie: Allereerste zien we integratievorm op het vergroten van de efficiency bij de verwerking van de *fysieke goederenstroom*. Fysieke integratie kan dan ook gedefinieerd worden als de activiteiten die zicht richten op het verbeteren van efficiency van het primaire proces. Het gebruik van standaardpallets door afnemer en leverancier is hiervan het meest bekende voorbeeld. We onderscheiden de betreffende activiteiten in:

1. Afstemming/standaardisatie van transport en handleiding apparatuur voor wissellaadbakken, containers en stellingen.
2. Afstemming/standaardisatie van collidragers zoals rolcontainers, pallets, kratten en fusten.

Afstemming tussen de betrokken partijen van deze activiteiten moet leiden tot een daling van de logistieke kosten, alleen dan is er sprake van fysieke integratie. De efficiencyverbeteringen in het distributieproces is bijvoorbeeld het gebruik van rolcontainers bij postvervoer of bij veilingen. De kwekers gebruiken de containers voor aanvoer van producten. Op de veiling gebruiken we deze voor de opslag, de sortering en het interne transport. Bovendien de koper kan deze gebruiken voor de afvoer van het gekochte product;

Informatie intergratie: Een tweede vorm van integratie betreft activiteiten die zicht richten op *afstemming van informatiestromen*. Informatie tussen de computer van de afnemende en aanleverende

³ Klantentevredenheid betekent bijvoorbeeld een aflevering met een 95% betrouwbaarheid binnen 24 uur.

organisatie wordt zonder verdere tussenkomst van de mens uitgewisseld. Daarbij gaat het om gestructureerde gegevens zoals bestelorders, facturen, verzenddocumenten, etc. (Bakker, 1997). Een voorbeeld van deze integratievorm is het gekoppelde doorzenden van verzendgegevens van de verlader naar transporteur. Een ander voorbeeld is het systeem van het Centraal Boekhuis, waardoor de aangesloten boekhandels een directe verbinding kunnen leggen met een centrale voorraad. Een belangrijk hulpmiddel bij deze integratievorm is *Electronic Data Interchange*⁴ (EDI);

Besturingsintegratie: De derde vorm op besturingsniveau komt tot stand door het koppelen van de stuurinformatie uit andere schakels binnen de keten. Abert Heijn (AH) vertaalt deze integratie als ‘Vandaag Voor Morgen’. De afspraken tussen AH en Grolsch zijn een voorbeeld van deze integratievorm. Grolsch krijgt per uur de verkoopcijfers van AH op een elektronische manier. Grolsch heeft zich verplichting om binnen vier uur na het ontvangen van die informatie, het distributiecentrum van AH te herbevoorraden. Kortom naast gunsten zijn er ook harde verplichtingen verbonden aan deze samenwerking;

Grondvormintegratie: Bij deze laatste vorm wordt een gedeelte van de *aansturende activiteiten* bij een andere partij in de keten gelegd. Dit betreft meer dan het uitbesteden van *uitvoerende activiteiten*. Het gaat hierbij om het overdragen van logistieke planningstaken. Een voorbeeld hiervan is een Duitse meubelketen die met een leverancier de afspraak heeft gemaakt dat de leverancier de voorraad in het magazijn van het bedrijf op peil houden. De fabrikant is daarmee verantwoordelijk voor de beschikbaarheid van zijn producten binnen de ‘muren’ van zijn afnemer.

Vendor managed inventory (VMI) is een voorbeeld van dit type integratie. De leverancier is in dat concept verantwoordelijk voor de beschikbaarheid van zijn producten binnen de ‘muren’ van zijn afnemer. We zullen op de inhoud van VMI in hoofdstuk 3 ingaan.

2.3 Cross-docking distributie

Over de term *Cross-docking* bestaat nog veel onduidelijkheid. Sommigen nemen deze term als een nieuw proces in een distributiecentrum. We geven daarover een volgende definitie:

Cross-docking is een concept waarbij de verzamelde goederen niet worden opslagen maar snel door het distributiecentrum (DC) worden gesluisd. Deze goederen worden direct per zending naar de winkels toegewezen vanuit de vrachtwagen van de producent (Rooij, 2002).

Echter, *Cross-docking* stelt een aantal vereisten. In de volgende tabel staan de belangrijkste vereisten vermeld voor een soepele *cross-docking* operatie, tevens de bijwerkingen, als er niet aan deze vereisten voldoen.

Vereiste	Bijwerking
Hoge kwaliteit logistieke processen van leverancier	Stagnatie in aanvoer DC, Vertraging in aflevering bij winkels, herstelkosten
Voldoende capaciteit in het distributiecentrum	Verstopte goederenstroom, kans op verwisselingen en fouten aflevering
Adequate informatiesystemen en EDI-verbindingen	Slechte beheersing in- en uitgaande informatiestromen, inefficiëntie, administratieve fouten, stagnerende uitleveringen

(Bloemen, 1998)

⁴ Electronic Data Interchange (EDI) is het uitwisselen van informatie tussen ondernemingen via rechtstreekse verbindingen tussen de computersystemen van de betrokken ondernemingen.

3. Wat is VMI?

Als we de balansen van ondernemingen raadplegen, zien we vandaag nog steeds dat het grote aandeel van de bedrijfsmiddelen naar voorraden gaat. Bedrijven houden voorraden aan omdat ze in onzekerheid verkeren over de toekomstige vraag naar hun product. Ketenintegratie streeft nu naar de goederenstroom te optimaliseren zodat de stilstaande voorraden in de keten tot een minimum gereduceerd worden. Een systeem voor deze samenwerking is *Co-Managed Inventory* (CMI) ofwel *Vendor Managed Inventory* (VMI).

In het vorige hoofdstuk hebben we VMI als een voorbeeld voor een *grondvormintegratie* genoemd. Nu wordt de achtergrond van VMI besproken (3.1). Vervolgens besteden we aandacht aan de eisen voor het succesvolle VMI (3.2). Ten slotte zijn de voor- en nadelen van VMI-systeem (3.3).

3.1 Achtergrond van VMI

Vendor Managed Inventory (VMI) wordt opgezet door het gevolg van de grote fluctuaties van de orders en voorraden. Want de leverancier heeft dan gebrek aan de informatie over de vragen van de klanten in de keten. Het effect wordt *zweepslageffect* (in het Engels: *bullwhip-effect*) genoemd en het leidt namelijk tot een lagere omzet.

VMI wordt geïntroduceerd door afnemer Wal-Mart en fabrikant Procter & Gamble, en is voortgekomen uit de kleinhandel, waar VMI als een belangrijk middel wordt beschouwd om lege schappen, neeverkoop en stilstaande producten te voorkomen. Ook buiten de kleinhandel vindt VMI steeds meer toepassing. Een voorbeeld hiervan is de industrie gemotoriseerde voertuigen, waarin de inlevering van onderdelen en modules wordt bestuurd met VMI. Een ander voorbeeld betreft de computerfabrikant Dell, die het grootste gedeelte van haar verkopen realiseert via Internet rechtstreeks contact met de consumenten, en ook rechtstreeks op het Internet verbonden is met haar toeleveranciers.

Verder wordt VMI gezien als een volgende stap na de invoering van *Electronic Data Interchange* (EDI). Praktijkervaring leert dat na invoering van EDI de technische realisatie van VMI wel eenvoudig is. Ten slotte brengt VMI de betere mogelijkheden om de productie af te stemmen op de vraag en betekent uiteindelijk een hoge afzet.

3.2 Definities over VMI

VMI wordt als volgt gedefinieerd:

Vendor Managed Inventory (VMI) betekent dus dat de leverancier verantwoordelijk is voor het voorraadbeheer bij de klant en dus zelf bepaalt welk product op welk moment aan de klant wordt geleverd (Goor, 2001).

Bij de productiebedrijven definiëren we als volgt:

“A means of optimizing Supply Chain performance in which the manufacturer is responsible for maintaining the suppliers inventory levels. The manufacturer has access to the suppliers’ inventory data and is responsible for generating purchase orders” (VMI-site, 2002).

Wij merken op *Co-Managed Inventory* (CMI) een meer toepasselijke term, want CMI impliceert de samenwerking tussen partijen op het gebied van voorraadbeheer. Echter, wij hebben voorkeur voor de term *Vendor Managed Inventory* (VMI) in dit werkstuk, omdat wij deze term vaak hebben gezien in de gevonden literaturen.

3.3 Eisen voor effectief VMI

De drie noodzakelijke factoren voor het succesvolle VMI zijn:

Samenwerking: Een kenmerk van VMI is de wederzijdse verplichtingen, die de partijen van elkaar aangaan. De afnemer vertrouwt aan de leverancier de verkoopgegevens, het voorraadniveau en de vraagvoorspelling toe. Op basis van deze informatie kan de leverancier de bestelplanning samenstellen om de goederen op tijd te leveren. De afspraken over informatie-uitwisseling worden in een contract vastgelegd, bijvoorbeeld prijs en levertijd.

Een noodzakelijke voorwaarde hiervoor is dat alle partners in de keten dezelfde planning delen, dus treden ze steeds als eenheid naar buiten op, dat wil zeggen dat alle partners steeds dezelfde informatie, vraagvoorstelling en planning met elkaar delen en gebruiken (Chorr, 1998). De inspanningen voor VMI liggen vooral in het opbouwen van een relatie tussen leverancier en afnemer, omdat het vertrouwen in de relatie essentieel is;

Beschikbaarheid van ICT hulpmiddelen: Naast de inhoud van de logistieke informatie is echter ook de wijze waarop informatie wordt uitgewisseld een belangrijk gegeven. De wijze van informatie-uitwisseling is de afgelopen decennia sterk veranderd, Al geruime tijd wordt *Electronic Data Interchange* (EDI) gebruikt voor de communicatie in de keten. Hiermee zijn de organisaties in staat op gestandaardiseerde wijze elektronische berichten uit te wisselen. De informatie kan dus direct gebruikt worden binnen het informatiesysteem van de ontvanger, daardoor kunnen de computers van verschillende partners communiceren via gestandaardiseerde berichten.

Er maakt nu gebruik van *Radio Frequency Identification* (RFID), welke op de bepakkingsen worden geplakt. Naar verwachting zal het aantal toepassingen van RFID in de komende tijd sterk toenemen (Rooij, 2002). Zodoende kan men de verzendingen en voorraadniveau zonder menselijke interventie blijven volgen. Wij zijn namelijk van mening dat informatietechnologie in deze tijd een voorwaarde is om te kunnen concurreren en om klantgericht te kunnen werken;

Organisatiestructuur: Een afspraak zal op operationeel niveau gemaakt worden, dus moeten de nodige taken anders worden ingevuld. Er dienen duidelijke afspraken gemaakt te worden over de verdeling van verantwoordelijkheden en taken, maar ook over het delen van risico's, kosten en opbrengsten. Verder moet een afstemming op het gebied van bedrijfscultuur gezocht worden.

3.4 Voor- en nadelen van VMI

In deze paragraaf behandelen we naaste algemene voor- en nadelen, ook specifiek voor- en nadelen voor de leverancier.

➤ Algemene voor- en nadelen

Voordelen

- De informatie-uitwisselingen zijn sneller en betrouwbaarder
- De bestelprocessen zijn eenvoudiger
- De invoergegevenfout wordt gereduceerd
- De processen worden stroomopwaarts in de keten aangepast
- Het implementeren van VMI is in een korttijdsbestek
- De opbrengsten gaan omhoog, de operationele kosten gaan omlaag.

Nadelen

- De partijen moeten gebruik van dezelfde protocollen (EDI, RFID) maken
- De volledige vertrouwensrelaties tussen de partners in de keten zijn een essentiële voorwaarde voor het welslagen van VMI
- De partijen hebben diverse belangen.

➤ Specifieke voor- en nadelen voor de VMI-leverancier

Voordelen

- Het tijdstip van een aflevering is vast
- De vraagvoorspelling is eenvoudiger
- De afleveringfouten zijn minder
- Het opbouwen van een dergelijk relatie leidt tot *klantloyaliteit*.

Nadelen

- Dit brengt met meer werk zich mee
- Het productieproces is namelijk gebaseerd op het voorraadniveau van zijn klant
- De administratiekosten, handlingkosten en transportkosten gaan omhoog

4. Voorraadpolitiek voor VMI systeem

4.1 Inleiding

Uit de vorige hoofdstukken hebben we een ketenintegratie en *Vendor Managed Inventory* (VMI) toegelicht. In dit hoofdstuk ontwikkelen we een voorraadpolitiek voor VMI-leverancier door een wiskunde model.

De leverancier kan niet zomaar op elk moment van de dag elk willekeurig aantal product verzenden, maar hij moet die veel kleine orders combineren tot een *periodiek* of *economische* zendinggrootte (denk bijvoorbeeld aan één trucklading, één pallet flessen, etc.) voordat een verzending wordt afgeleverd.

We beschouwen dat de leverancier gebruik maakt van de *bestelmethode-(s,S)*⁵ voor de aanvulling van de voorraden. Als een order niet direct leverbaar is uit de voorraad, moet de leverancier een bestelling plaatsen. Er is geen sprake van de levertijd, daardoor kunnen we de goederenontvangst en de goederenverzending met *Cross-docking* distributie toepassen, zodat de voorraad vlak na de aanvulling weer op een bepaald maximaal niveau komt, dat we met de letter *S* aanduiden. Dit systeem noemen wij een *periodieke verzending* en een *tijd gebaseerd* model.

De volgende vraag is om een goede *aflevering-* en *bestelplanning* te vinden:

Hoe is de verzendingfrequentie en hoe groot het voorraadniveau om de totale kosten te minimaliseren?

Onze aanpak is de totale kosten te minimaliseren met behulp van een *vernieuwingsproces*⁶ (in het Engels: Renewal process). Echter, de *klantentevredenheid* moet behouden blijven.

Allereerste worden drie aannames opgesomd voor ons model. Met deze veronderstellingen kunnen wij het vraagproces modelleren als een *vernieuwingsproces* (4.2). Daarna behandelen wij vier soorten kosten, te weten inkoopkosten, voorraadkosten, vervoerkosten en de kosten van nee-verkoop. Deze kosten spelen een belangrijke rol bij het bepalen van een optimale strategie (4.3). Verder worden de optimale totale kosten afgeleid met behulp van een *Poisson proces* (4.4). Ten slotte komen een numerieke illustratie en de resultaten hierbij aan de orde. We sluiten dit hoofdstuk af met twee conclusies (4.5).

⁵De *Bestelmethode (s, S)* is methode waarin een bestelling wordt geplaatst als de voorraad lager is dan het bestelniveau *s*. De voorraad wordt dan aangevuld tot het maximale voorraadniveau *S* bovendien de bestelling vindt plaats op een vast tijdstip.

⁶*Vernieuwingsproces* is proces van X_i waarin X_i het tijdsinterval tussen $(i-1)^e$ order de i^e order is bovendien alle X_i onderling onafhankelijk en identiek verdeeld zijn.

4.2 Probleembeschrijving

De drie aannamen van het model zijn als volgt:

- De leverancier ontvangt achtereenvolgens verschillende orders van één eenheidproduct van diverse afnemers binnen een geografische regio, daardoor speelt de afstand tussen afnemer en leverancier geen rol in vervoerkosten. Deze orders worden gecombineerd in een grote lading voordat er zal worden afgeleverd binnen een bepaalde regio;
- De afnemers zijn gewillig om te wachten op gevraagde goederen. De kosten van dit wachten ofwel nee-verkoop neemt de leverancier op zich;
- Alle gecombineerde verzendingen in één periode moeten worden afgeleverd vanuit de voorraad van de leverancier. Als de voorraad onvoldoende is om aan een order volledig te voldoen, moet de leverancier onmiddellijk een bestelling plaatsen bij de fabrikanten. In deze aanname wordt er vanuit gegaan dat de fabrikant altijd aan de gewenste bestelhoeveelheden van de leverancier kan voldoen. De *levertijd*, die nodig is voor een voorraadaanvulling, is verwaarloosbaar, zodat een geconsolideerde aflevering op tijd kan plaatsvinden. De voorraad is vlak na de aanvulling gelijk aan S , waardoor er weer een nieuwe *aanvullende cyclus*⁷ begint, dus weer een maximaal voorraadniveau (Cetinkaya, 2000).

Een groep van afnemers in een geografische regio plaatsen in willekeurige volgorde een order van één eenheid product bij de leverancier. Stel, een order bezit een willekeurige aankomsttijd en X_i is het tijdsinterval tussen $(i-1)^e$ order de i^e order bovendien alle X_i zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld.

De rij $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ heet *vernieuwingsproces*. Neem aan dat op $X_0 = 0$ het systeem leeg

is en laat $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

We definiëren $N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}$ als het aantal aankomstorders in het tijdsinterval $(0, t]$. Want een beslissing voor een verzending wordt genomen op een *periodieke* basis of in ieder T tijdeenheden, bijvoorbeeld dagen. Het analyseren van voorraadpolitiek kan ondersteunen met het *vernieuwingsproces* om de optimale totale kosten te behalen. Dit tijdsinterval T representeert ook de lengte van een *periodieke verzending*, dus begint een nieuwe periode ieder T tijdeenheden. Het aantal vragen per periode kunnen weergegeven worden in $N_n(T)$, waarin $n = 1, 2, 3, \dots$. Een belangrijke grootte in dit model is de grootte van de gecombineerde lading $L(t)$ waarin $t = T, 2T, 3T, \dots$. Dus is het aantal uitstaande orders op tijdstip t gelijk aan $L(t)$.

We definiëren $L(nT) = N_n(T)$, waarin $L(nT)$ een rij variabelen van verzendinggrootte. Als $N(t)$ een *Poisson proces* is, dan is de rij variabelen $N_n(T)$ onderling onafhankelijk en identiek verdeeld, Elke variabele heeft dezelfde verdelingsfunctie als de stochastische variabele $N(T)$.

Zij $I(t)$ het voorraadniveau op tijd t geeft en Q maximaal voorraadniveau is vlak na de voorraad wordt aangevuld.

Een bestelling voor de aanvulling van de voorraad wordt alleen geplaatst als het niet direct leverbaar is uit de voorraad om aan de orders van klanten te kunnen voldoen. We nemen aan dat een *cross-docking* distributie wordt gebruikt, daardoor wordt een deel van de aanvulling meegestuurd naar de regio van de klanten. De restante van de aanvulling wordt in de voorraad gebracht, zodat vlak na de aanvulling de voorraad gelijk is aan S .

⁷ *aanvullende cyclus* is tijdsinterval tussen achtereenvolgende bestellingen van de leverancier.

We hebben in deze probleembeschrijving vier volgende belangrijke kenmerken:

1. $I(t)$ en $L(t)$ worden waargenomen, waarin $t = T, 2T, 3T, \dots$. Een *aanvullende cyclus* bevat één of meer *periodieke verzendingen*;
2. De leverancier maakt gebruik van een speciale bestelmethode (s, S) met $s = 0$ en $S = Q$. Voor ons model is het toepasselijk met $s = 0$ want de levertijd is nul. Het maximale voorraadniveau is dan gelijk aan Q . Een bestelling van de grootte $Z(t)$ is geplaatst als de voorraad tot nul is gedaald

$$Z(t) = \begin{cases} Q + L(t) - I(t) & \text{als } I(t) < L(t) \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Waarin $t = T, 2T, 3T, \dots$

3. Een deel van de aanvulling $Z(t)$ wordt door *Cross-docking* doorgevoerd naar de lading zodat een gecombineerde lading $L(t)$ onmiddellijk kan opsturen naar een bepaalde regio;
4. Een nieuwe *periodieke verzending* begint met $\gamma(t)$ eenheden in voorraden waarin

$$\gamma(t) = \begin{cases} Q & \text{als } I(t) < L(t) \\ I(t) - L(t) & \text{anders} \end{cases}$$

Waarin $t = T, 2T, 3T, \dots$

Het doel van dit wiskundige model is de optimale waarde voor Q en T te bepalen, met behulp van het *vernieuwingsproces*.

4.3 Probleemformulering

De verwachte totale kostenfunctie in een *aanvullende cyclus*, $C(Q, T)$, wordt gedefinieerd door

$$C(Q, T) = \frac{E[\text{De totale kosten per aanvullende cyclus}]}{E[\text{De lengte van de aanvullende cyclus}]} \quad (1)$$

(Cetinkaya, 2000, pag.223)

De optimale waarde voor een maximaal voorraadniveau Q en de lengte van een periode T worden dan gevonden uit het volgende optimaliseringsprobleem:

$$\begin{aligned} &\text{Minimaliseer } C(Q, T) \\ &\text{Onder } Q \geq 0 \\ &\quad T \geq 0. \end{aligned}$$

Want een bestelling wordt geplaatst als een order niet direct leverbaar is uit de voorraad, we definiëren het aantal *periodieke verzending* binnen *aanvullende cyclus* als volgt:

$$K = \inf \left\{ k : \sum N_n(T) > Q \right\}.$$

Bij de definitie is K een stochastische variabele. De lengte van een *voorraad aangevuld cyclus* is als het gevolg daarvan gedefinieerd

$$E[\text{De lengte van aanvullende cyclus}] = E[K]T. \quad (2)$$

Waarin is T de lengte van een periode.

Wij gaan ervan uit dat de totale kostenfunctie $C(Q, T)$ per *aanvullende cyclus* bestaan uit alle inkoopkosten, vervoerkosten, voorraadkosten en de kosten van nee-verkoop.

De betekenis van de afkortingen in de formules is als volgt:

A_R = vaste bestelkosten voor het plaatsen van een order (in €/bestelling)

c_R = inkoopprijs per eenheid product (in €/stuk)

h = voorraadkosten per stuk per tijdeenheid (in €/stuk/tijdeenheid)

A_D = vaste verzendingkosten (in €/order)

c_D = vervoerkosten per eenheid (in €/order)

w = kosten van nee-verkoop (in het Engels: *customer waiting cost*) (in €/stuk/tijdeenheid).

4.3.1 Verwachte bestelkosten

We definiëren

$$E[\text{bestelkosten per aanvullende cyclus}] = A_R + c_R E[\text{bestelhoeveeheden}].$$

De bestelhoeveelheden zijn gelijk aan het aantal aankomstorders binnen een *aanvullende cyclus*, dus

$$E[\text{bestelhoeveeheden}] = E\left[\sum_{n=1}^K N_n(T)\right].$$

Hierbij is $N(T)$ gedefinieerd door

$$N(T) = \text{het aantal aankomstorders per periode ofwel } T \text{ tijdeenheden.}$$

We herschrijven

$$E[\text{bestelkosten per aanvullende cyclus}] = A_R + c_R E\left[\sum_{n=1}^K N_n(T)\right]$$

Of

$$E[\text{bestelkosten per aanvullende cyclus}] = A_R + c_R E[K]E[N(T)]. \quad (3)$$

4.3.2 Verwachte vervoerkosten

We definiëren

$$E[\text{vervoerkosten per aanvullende cyclus}] = A_D E[K] + c_D E[K] E[N(T)]. \quad (4)$$

4.3.3 Verwachte voorraadkosten

Voorraadverloop begint altijd met een Q eenheden binnen iedere *aanvullende cyclus*. De gemiddelde voorraden worden benaderd door:

$$I(t) = \begin{cases} Q, & \text{als } 0 \leq t \leq T, \\ Q - N_1(T), & \text{als } T \leq t \leq 2T, \\ \dots & \\ Q - \sum_{n=1}^{K-1} N_n(T), & \text{als } (K-1)T \leq t \leq KT. \end{cases}$$

Volgt dat $I(t) = \int_0^{KT} I(t) dt$.

De verwachte voorraadkosten in een *aanvulling cyclus* is dus:

$$E[\text{voorraadkosten per aanvullende cyclus}] = hE\left[\int_0^{KT} I(t) dt\right]$$

We definiëren $H(Q, T) = E\left[\int_0^{KT} I(t) dt\right]$ en herschrijven

$$E[\text{voorraadkosten per aanvullende cyclus}] = hH(Q, T). \quad (5)$$

4.3.4 Verwachte kosten nee-verkoop

Want de leverancier kan niet onmiddellijk de orders van zijn klanten dienen te aanleveren. De klanten moeten wachten tot een bepaald tijdstip. Als het gevolg daarvan kan er het verlies van een klant of het verlies van goodwill van de leverancier. Deze kosten zijn tijdsafhankelijk en we definiëren

$$E[\text{kosten van nee-verkoop per aanvullende cyclus}] = wE[K]E[\text{wachttijd per periodieke verzending}]$$

Met illustratie van figuur 4.1 kunnen we de wachttijd per periode bepalen bij de volgende benadering

$$E[\text{wachttijd per periodieke verzending}] = wE[(T - S_1) + (T - S_2) + \dots + (T - S_{N(T)})]$$

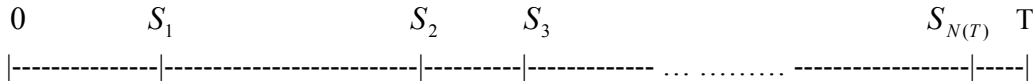
$$E[\text{wachttijd per periodieke verzending}] = wE\left[N(T)T - \sum_{n=1}^{N(T)} S_n\right].$$

We definiëren $W(T)$ als het verwachte wachttijd gedurende de *aanvullende cyclus*

$$W(T) = E \left[N(T)T - \sum_{n=1}^{N(T)} S_n \right].$$

Dus

$$E[\text{kosten van nee} - \text{verkoop per aanvullende cyclus}] = wE[K]W[T] \quad (6)$$



Figuur 4.1: Het $N(T)$ aantal orders komen binnen één *periodieke verzending*

4.4 Gedetailleerde analyse

We vullen de vergelijkingen (2), (3), (4), (5) en (6) in (1). Dat leidt tot

$$C(Q, T) = \frac{\{A_R + c_R E[K]E[N(T)]\} + \{A_D E[K] + c_D E[K]E[N(T)]\} + hH(Q, T) + wE[K]E[T]}{E[K]T}$$

Wij herschrijven

$$C(Q, T) = \frac{A_R}{E[K]T} + \frac{c_R E[N(T)]}{T} + \frac{A_D}{T} + \frac{c_D E[N(T)]}{T} + \frac{hH(Q, T)}{E[K]T} + \frac{wE[T]}{T} \quad (8)$$

Als de aankomstorders een *Poisson proces* zijn, dus kunnen we de optimale waarden voor het paar (Q, T) bepalen, zodat $C(Q, T)$ minimaal zijn. In de volgende paragraaf worden de kostenparameters van (8) uitgedrukt door de parameter van dit *Poisson proces*.

4.4.1 De uitdrukking van de totale kostenfunctie

Stel, de orders komen aan volgens een *Poisson proces* met aankomstintensiteit λt , dus komen er per T tijdseenheden gemiddeld λT orders binnen

$$E[N(T)] = \lambda T.$$

Uit B(3), B(6) en B(8) in Bijlagen B hebben we resp.

$$E[K] \approx \frac{Q+1}{\lambda T},$$

$$H(Q, T) = TQ + \frac{Q(Q+1)}{2\lambda},$$

$$W(T) = \frac{1}{2} \lambda t^2.$$

We vervangen \bar{Q} door $(Q + 1)$.

De totale kostenfunctie per cyclus (1) kan bij benadering worden uitgedrukt als volgt:

$$C(\bar{Q}, T) = \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + c_R \lambda + \frac{A_D}{T} + c_D \lambda + \frac{h \lambda T (\bar{Q} - 1)}{\bar{Q}} + \frac{h(\bar{Q} - 1)}{2} + \frac{w \lambda T}{2} \quad (9)$$

Onze optimaliseringsprobleem wordt gegeven door

$$\begin{aligned} & \text{Minimaliseer } C(\bar{Q}, T) \\ & \text{Onder} \quad (10) \\ & \quad \bar{Q} \geq 0 \\ & \quad T \geq 0. \end{aligned}$$

4.4.2 De Oplossingen

Zij (\bar{Q}^*, T^*) de oplossing van (10) is, dus is onze originele oplossing $(\bar{Q}^* - 1, T^*)$, want $Q = \bar{Q} - 1$.

Om het minimum van $C(\bar{Q}, T)$ te vinden, differentiëren we $C(\bar{Q}, T)$ naar \bar{Q} en T , en stellen we de partiele afgeleiden aan nul.

De optimale waarden worden gevonden uit (C.1) en (C.2) in Bijlagen C resp.

$$\bar{Q} = \sqrt{\frac{2A_R \lambda}{h} - 2\lambda T}, \quad (C.1)$$

$$T = \sqrt{\frac{2A_D \bar{Q}}{\lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}}. \quad (C.2)$$

Dus, kunnen we Q^* en T^* bepalen door de oplossing van (C.1) en (C.2) resp. Echter, er is geen garantie dat de oplossingen door deze twee vergelijkingen altijd Q^* en T^* kunnen inleveren. Want de functie (9) is multivariabele functie (zie Bijlagen C.2).

De berekening van de optimale waarden wordt vereenvoudigd door het vullen (C.2) in (9), daardoor kunnen we $C(\bar{Q}, T)$ tot $C(\bar{Q})$ reduceren

$$C(\bar{Q}) = \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + \frac{h \bar{Q}}{2} + \sqrt{\frac{2A_D \lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}{\bar{Q}}} + c_D \lambda + c_R \lambda - \frac{h}{2}.$$

Wij splitsen de kosten, die met \bar{Q} zich meebrengen, in twee delen, te weten:

$$C_1(\bar{Q}) = \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + \frac{h \bar{Q}}{2}, \quad C_2(\bar{Q}) = \sqrt{\frac{2A_D \lambda [2h(\bar{Q}-1) + w \bar{Q}]}{\bar{Q}}}.$$

Stel, $C'(\bar{Q})$, $C_1'(\bar{Q})$ en $C_2'(\bar{Q})$ zijn de eerste afgeleide van $C(\bar{Q})$, $C_1(\bar{Q})$ en $C_2(\bar{Q})$ resp.

De optimale waarde van \bar{Q} wordt verkregen door de afgeleide $C'(\bar{Q}) = C_1'(\bar{Q}) + C_2'(\bar{Q})$ aan nul te stellen.

Wij hebben hier drie kenmerken:

1. Als $C'(\bar{Q}^*) = 0$ over $[1, +\infty)$ is, dan is Q^* de enige oplossing ofwel
De snijpunt tussen $C_1(\bar{Q})$ en $C_2(\bar{Q})$ is uniek want $C_1'(\bar{Q})$ en $C_2'(\bar{Q})$ nemen over $[1, +\infty)$ toe;
2. Als $C'(1) > 0$ is, dan is er geen snijpunt over $[1, +\infty)$. $C(\bar{Q})$ is een toenemende functie over $[1, +\infty)$, dus is $Q^* = 1$ en $T^* = \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}}$;
3. Als $C'(1) \leq 0$ is, dan vinden we (T^*, Q^*) door oplossingen van (C.1) en (C.2).

$$\text{Anders is } Q^* = 1 \text{ en } T^* = \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}}.$$

Ten slot van deze paragraaf geven wij twee opmerkingen voor het bepalen de optimale waarden

- Ten eerste wordt het bepalen het (Q^*, T^*) uit (C.1) vereenvoudigd door de volgende grenzen van Q^* door (C.4) in Bijlagen C.4

$$\sqrt{\frac{2A_R \lambda}{h} - 2\lambda \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}}} \leq \bar{Q}^* \leq \sqrt{\frac{2A_R \lambda}{h}}; \quad (\text{C.4})$$

- Ten tweede kunnen wij een schatting voor \bar{Q}^* berekenen door (C.6) in Bijlagen C.5

$$\bar{Q}^* = \sqrt{\frac{2A_R \lambda}{h}}, \quad T^* = \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda(w+2h)}}. \quad (\text{C.6})$$

De kostenfunctie wordt door (C.5) in Bijlagen C.5 gegeven

$$C(\bar{Q}, T) = \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + c_R \lambda + \frac{A_D}{T} + c_D \lambda + h \lambda T + \frac{h(\bar{Q}-1)}{2} + \frac{w \lambda T}{2} \quad (\text{C.5})$$

Het resultaat is precies de *EOQ-formule*⁸

⁸ *EOQ-formule* is formule voor het berekenen van de optimale bestelgrootte, zodat de bestelkosten en voorraadkosten minimaal zijn. De formule geldt onder de voorwaarden dat er een afnamepatroon is en dat de order in één keer geleverd wordt met levertijd nul.

4.5 Numerieke resultaten en conclusie

Uit de vorige paragraaf weten we dat de totale kosten door (C.1) of (C.6) kunnen berekenen. In deze paragraaf werken wij de totale kosten uit met behulp van de basiswaarden. De resultaten worden in zes verschillende tabellen gezet.

Allereerste berekenen we de grenzen van de optimale oplossingen van Q^* uit (C.4). Op basis van deze waarden van Q^* worden de optimale oplossingen van (Q^*, T^*) door (C.1) en (C.2) gevonden. Daarna schatten we de optimale oplossingen van (Q^*, T^*) met behulp van (C.6). Bovendien de waarden van Q^* worden afgerond naar de naaste integer. Ten slotte vullen we de afgeronde waarden van Q^* in (9) en (C.5) om totale kosten te berekenen.

Zij de basiswaarden van kostenparameters zijn:

$A_R = \text{€}125$ per aanvulling;

$h = 7$ per eenheid per week;

$A_D = \text{€}50$ per zending;

$w = \text{€}10$ per eenheid per week;

$\lambda = 10$ eenheden product per week.

Na een uitwerking krijgen wij:

Uit (C.1) nemen we $Q^* = 18.54$ aan, deze waarde voldoet aan de grens $18,36 \leq Q^* \leq 18,89$, dus krijgen wij $Q^* = 19$ en $T^* = 0.66$.

Uit (C.6) vinden wij $Q^* = 19$ en $T^* = 0.65$.

In tabel 1 vatten we onze berekening samen voor deze basisparameters. De vergelijking tussen de verwachte gemiddelde kosten is erin te zien. Van tabel 2 tot en met 6 laten we de invloed zien van één variërende parameter op de tijd, terwijl de overige parameters gelijk blijven aan de basiswaarde.

	\bar{Q}	T	Totale kosten uit (9)	Totale kosten uit (C.5)
Optimale oplossingen uit (C.1) en (C.2)	19	0.66	281	N/A
Verwachte oplossingen uit (C.6)	19	0.65	281	284

Tabel 1: Oplossing voor basisparameters waarden

$A_R = 100$

	Q^*	T^*	Totale kosten uit (9)	Totale kosten uit (C.5)
Optimale oplossingen uit (C.1) en (C.2)	17	0.66	267	N/A
Verwachte oplossingen uit (C.6)	17	0.65	267	270

$A_R = 150$

	Q^*	T^*	Totale kosten uit (9)	Totale kosten uit (C.5)
Optimale oplossingen uit (C.1) en (C.2)	21	0.65	294	N/A
Verwachte oplossingen uit (C.6)	21	0.65	294	296

Tabel 2: Oplossing voor variëren A_R waarden

$\lambda = 5$

	Q^*	T^*	Totale kosten uit (9)	Totale kosten uit (C.5)
Optimale oplossingen uit (C.1) en (C.2)	13	0.93	197	N/A
Verwachte oplossingen uit (C.6)	13	0.91	197	200

$\lambda = 15$

	Q^*	T^*	Totale kosten uit (9)	Totale kosten uit (C.5)
Optimale oplossingen uit (C.1) en (C.2)	23	0.53	346	N/A
Verwachte oplossingen uit (C.6)	23	0.53	346	348

Tabel 3: Oplossing voor variëren λ waarden

$h = 5$

	Q^*	T^*	Totale kosten uit (9)	Totale kosten uit (C.5)
Optimale oplossingen uit (C.1) en (C.2)	22	0.72	249	N/A
Verwachte oplossingen uit (C.6)	22	0.72	249	251

$h = 9$

	Q^*	T^*	Totale kosten uit (9)	Totale kosten uit (C.5)
Optimale oplossingen uit (C.1) en (C.2)	16	0.61	310	N/A
Verwachte oplossingen uit (C.6)	17	0.60	310	313

Tabel 4: Oplossing voor variëren h waarden

$A_D = 25$

	Q^*	T^*	Totale kosten uit (9)	Totale kosten uit (C.5)
Optimale oplossingen uit (C.1) en (C.2)	17	0.46	237	N/A
Verwachte oplossingen uit (C.6)	19	0.46	237	238

$A_D = 75$

	Q^*	T^*	Totale kosten uit (9)	Totale kosten uit (C.5)
Optimale oplossingen uit (C.1) en (C.2)	18	0.80	316	N/A
Verwachte oplossingen uit (C.6)	19	0.79	316	319

Tabel 5: Oplossing voor variëren A_D waarden

$w=8$

	Q^*	T^*	Totale kosten uit (9)	Totale kosten uit (C.5)
Optimale oplossingen uit (C.1) en (C.2)	19	0.69	275	N/A
Verwachte oplossingen uit (C.6)	19	0.67	275	277

$w=12$

	Q^*	T^*	Totale kosten uit (9)	Totale kosten uit (C.5)
Optimale oplossingen uit (C.1) en (C.2)	19	0.63	288	N/A
Verwachte oplossingen uit (C.6)	19	0.62	288	290

Tabel 6: Oplossing voor variëren w waarden

Wij sluiten deze numerieke illustratie af met twee volgende conclusies:

1. De oplossingen uit (C.6) zijn de goede schattingen voor ons model. De kostenparameters hebben belangrijke invloed op de optimale waarden, wij geven hieronder een paar bijvoorbeelden. Als:
 - A_R toeneemt, dus nemen Q^* en totale kosten toe
 - λ toeneemt, dus neemt Q^* toe, terwijl T^* afneemt
 - h toeneemt, dus neemt (Q^*, T^*) af
 - A_D toeneemt, dus neemt T^* toe
 - w toeneemt, dus neemt T^* af.
2. De originele optimale oplossing is beschreven door (Q^*-l, T^*) . In het geval $C'(1) \leq 0$ kunnen we de oplossingen bepalen als volgt:
 - Het maximale voorraadniveau is zero
 - Alle orders komen binnen gedurende $T^* = \sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}}$ tijdeenheden zijn geconsolideerd.

5. Praktijksituaties

De aandacht voor het zoeken naar kostenbesparingen schuift de laatste jaren dan ook op in de richting van samenwerking met partners in de keten. Er zijn enkele succesvolle voorbeelden van ketenpartners die de logistieke processen anders hebben ingericht om de totale kostenaansturing te verbeteren. Een voorbeeld hier van is het *Co-makership*-programma⁹ van Albert Heijn (AH), waarbij de leverancier verantwoordelijk is voor de voorraadniveaus in het distributiecentrum van AH. Er is volgens de respondenten van het onderzoek echter nog volop ruimte voor verlaging van kosten in de keten. Meer dan 80% van de producenten en 85% van retailers geeft namelijk aan dat aanvullende besparingen van 1,5 tot 2% haalbaar moeten zijn (Colenbrander, 2002).

Het bedrijf Little Duck levert kinderkleding aan retailers. Na aanschaf van VMI-software wordt het personeel van Little Duck getraind en worden de parameters van de VMI-software ingesteld, te weten afleveradressen, levertijden, transportritten en verkoophistorie. De omzet stijgt met 23% en de voorraden worden gehalveerd. Vervolgens wordt het programma uitgerold naar andere klanten. Bij elke klant komt Little Duck wel iets bijzonders tegen.

Sommige retailers beschikken over verkoopgegevens maar niet over betrouwbare voorraadgegevens per filiaal. Daarom ontwikkelt Little Duck in hun VMI-software de mogelijkheden om deze voorraden te berekenen.

Sommige retailers hebben onvoldoende historische gegevens om een vraagvoorspelling te berekenen. Met deze klant wordt gezamenlijk een voorspelling ontwikkeld.

Sommige retailers eisen een minimale beschikbaarheid van bepaalde producten in de winkel uit oogpunt van schappresentatie ongeacht de vraag naar de producten. Ook deze eisen worden meegenomen in het systeemontwerp.

Klanten sturen wekelijks hun verkoop- en voorraadgegevens via *Electronic Data Interchange* (EDI) aan Little Duck. Deze gegevens worden doorgestuurd naar het VMI-systeem. Het VMI-systeem voorspelt elke week opnieuw de vraag voor de komende 52 weken en berekent de voorraden en uiteindelijk de levering per winkel. Hierbij wordt rekening gehouden met onder meer historische gegevens, seizoenpatroon en stijlverhouding (Goor, 2001).

⁹ *Co-makership* is de opbouw van een lange termijnrelatie met een beperkt aantal leveranciers op basis van wederzijds zakelijk vertrouwen

6. Conclusies

Dit werkstuk geeft de nadere definities van *Supply Chain Management* (SCM) ofwel ketenintegratie. De ketenintegratie beperkt zich niet tot logistieke activiteiten maar streeft naar immers naar de integratie van alle bedrijfsprocessen zodat de goederen op tijd en correct arriveren tegen zo laag mogelijk integrale kosten.

Vendor Managed Inventory (VMI) leidt tot een hogere servicegraad terwijl de voorraden afnemen, want de partijen in de keten bekijken elkaar voorraden en planningsen of de besluitvorming in de keten wordt gecentraliseerd. Daarnaast worden de resources als machines, mensen en transportmiddelen beter benut. Dankzij VMI kan de doorlooptijd van het proces verkort worden en de administratie last gereduceerd. De afnemer hoeft niet meer te plannen, bestellen en orders in te voeren. De leverancier stelt op basis relevante informatie de aanvulbehoefte vast

Tweede deel van dit werkstuk geeft een voorraadpolitiek voor VMI. Met behulp van dit wiskundige model kan een leverancier bepalen *hoe de verzendingfrequentie is* en *hoe groot het maximale voorraadniveau* om de totale kosten te minimaliseren.

Dit voorraadmodel is de coördinatie tussen transport- en voorraadbeslissingen, of de afweging tussen vier soorten kosten, te weten inkoopkosten, voorraadkosten, vervoerkosten en de kosten van neeverkoop om minimaal totale kosten te behalen.

Stel, een groep van afnemers in een geografische regio plaatsen in willekeurige volgorde een order van één eenheid product bij een leverancier. Want een beslissing voor een verzending wordt genomen op een *periodieke* basis ofwel in ieder T tijdeenheden, bijvoorbeeld dagen. Dit tijdsinterval T representeert ook de lengte van een *periodieke verzending*. Q is het maximale voorraadniveau vlak na de voorraad wordt aangevuld. De verwachte totale kostenfunctie in een *aanvullende cyclus* wordt gedefinieerd door

$$C(Q, T) = \frac{E[\text{De totale kosten per aanvullende cyclus}]}{E[\text{De lengte van de aanvullende cyclus}]}$$

De optimale waarde voor een voorraadniveau Q en de lengte van een periode T worden dan gevonden uit het volgende optimaliseringsprobleem:

$$\begin{aligned} &\text{Minimaliseer } C(Q, T) \\ &\text{Onder } Q \geq 0 \\ &\quad T \geq 0 . \end{aligned}$$

Als de orders aan volgens een *Poisson proces* komen met aankomstintensiteit λt , dus komen er per T tijdseenheden gemiddeld λT orders binnen .

De optimale waarden voor het paar (Q, T) bepalen als volgt:

$$\bar{Q} = \sqrt{\frac{2A_R\lambda}{h} - 2\lambda T}, \quad T = \sqrt{\frac{2A_D\bar{Q}}{\lambda [2h(\bar{Q}-1) + w\bar{Q}]}}$$

$$\text{Anders zijn } \bar{Q}^* = 1 \text{ en } T^* = \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}}.$$

Waarin $Q = \bar{Q} - 1$ en de betekenis van de afkortingen in de formules is als volgt:

A_R = vaste bestelkosten voor het plaatsen van een order (in €/bestelling)

h = voorraadkosten per stuk per tijdeenheid (in €/stuk/tijdeenheid)

A_D = vaste verzendingkosten (in €/order)

w = kosten van nee-verkoop (in het Engels: *customer waiting cost*) (in €/stuk/tijdeenheid).

De leverancier kan zijn producten zo goed mogelijk laten aansluiten bij het werkelijke verbruik door de afnemers, dus kunnen de voorraden in de keten afnemen. Verder zal de leverbetrouwbaarheid toenemen door het samenwerkingsverband van de klanten met de leverancier.

Aandachtspunten voor vervolgonderzoek

In dit model zijn er nog veel toevoegingen denkbaar, bijvoorbeeld het invoeren de orders van de klanten als een *samengesteld Poisson proces*. De orders komen aan volgens een *Poisson proces* en elke order bestelt de willekeurige hoeveelheden van een product (niet één eenheidproduct meer).

Laat D_n de gevraagde hoeveelheden door n^e order zijn. Neem aan dat D_1, D_2, D_3, \dots onafhankelijke stochastische variabelen zijn met eenzelfde kansverdeling, waarbij de rij $\{D_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ ook onafhankelijk is van het *Poisson proces* $\{N(t) : t \geq 0\}$.

Een *samengesteld Poisson proces* $\{N(t) : t \geq 0\}$ wordt gedefinieerd door $N(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i$. De stochastische $\{N(t) : t \geq 0\}$ geeft de totale hoeveelheden die van het product gevraagd wordt tot tijdstip t . De $N(t)$ is overeenstemming met het *vernieuwingsproces* (t_n, D_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$. En de verwachtingwaarde $N(t)$ wordt gegeven door $E[N(t)] = \lambda t E(N_1)$.

Literatuurlijst

- (Bakker, 1997) Bakker, C.G. e.a., *Logistiek management*, Zutphen: Thieme, 1997.
- (Bloemen, 1998) Bloemen, H., 'Cross docking voor versgroepen', *Inkoop & Logistiek*, december 1998, p. 14 – 17.
- (Cetinkaya, 2000) Cetinkaya, S. en C.Y. Lee, 'Stock Replenishment and Shipment Scheduling for Vendor-Managed Inventory Systems', *Management Science*, Vol. 46, Nr. 2, Februari 2000, p.217-232.
- (Collenbrander, 2002) Colenbrander, R. en P. Tielemans, 'Ketensamenwerking onder regie van de retailer', *Inkoop & Logistiek*, december 2002, p. 31.
- (Chorr, 1998) Chorr, J.E., *Purchasing in the 21st Century*, 2^e druk, Canada: Jonh Wiley & Sons, Inc, 1998.
- (Christoper, 1998) Christoper, M., *Logistics and Supply Chain Management*, 2^e druk, London: Financial time, 1998.
- (Goor, 1999) Goor, A.R., e.a., *Fysieke distributie: deken in toegevoegde waarde*, 4^e druk, Houten: EPN, 1999.
- (Goor, 2001) Goor, A.R., W. P.V. Amstel, *Van Logistiek naar Supply Chain Management*, Kluwer, 2001.
- (Rooij, 2002) Rooij, W.D., 'Identificatietechnologie vergroot efficiency in logistieke keten', *Inkoop & Logistiek*, oktober 2002, p. 3 – 4.
- (Tijms, 1994) Tijms, H.C., *Stochastic Models an Algorithmic Approach*, New York: John Wiley & Sons, 1994.
- (Veen, 2001) Veen, J.A.A.V.D en V. Venugopal, 'Het optimaliseren van supply chain door coördinatie van beslissingen', *Bedrijfskunde*, jaargang 73 (2001), nr. 1, p.37 – 47.
- (VMI-site, 2002) Hall, C., *Wat is VMI?*, 2002
<http://www.vendormanagedinventory.com>

Bijlagen A: kostenfactors met vernieuwingsproces

In deze bijlage zullen we vernieuwingsfunctie $M(t)$, verwachte aantal periode in een cyclus $E[K]$ verwachte gemiddelde voorraden $H(Q, T)$ en verwacht gemiddelde wachttijd $W[T]$ uitdrukken in verdelingfunctie van aankomstproces.

A.1 Vernieuwingsproces

Stel dat een order een stochastisch aankomsttijdinterval bezit. De rij stochastische variabelen X_1, X_2, X_3, \dots waarin X_i het tijdinterval tussen $(i-1)^e$ order de i^e order, en waarbij alle X_i onderling onafhankelijk en identiek verdeeld zijn. De rij $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ heet

vernieuwingsproces. Neem aan dat op $X_0 = 0$ het systeem leeg is en laat $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

We definiëren $N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}$ als het aantal aankomstorders in het tijdinterval $(0, t]$.

Een belangrijke grootheid in dit verband de *vernieuwingsfunctie*, $M(t)$, gedefinieerd als het verwachte aantal vernieuwingen (aankomsten) in het interval $(0, t]$, en dus:

$$M(t) = E[N(t)], \quad t \geq 0.$$

We definiëren de verdelingsfunctie van S_n voor $n = 1, 2, 3, \dots$

$$F_n(t) = P[S_n \leq t], \quad t \geq 0.$$

Noteert dat $F_1(t) = F(t)$, $t \geq 0$. Een basis relatie is

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t.$$

Deze relatie geeft

$$P\{N(t) = n\} = P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\}$$

$$P\{N(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

We krijgen nu voor iedere $t \geq 0$

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \quad (\text{A.1})$$

(Zie het lemma 1.1.1 in TIJMS, 1994, pag.2)

Wij herschrijven dit lemma

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}, \quad t \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

A.2 Verwacht aantal periode in een cyclus

We definiëren K als het aantal perioden per *aanvullende cyclus*

$$K = \inf \left\{ k : \sum_{n=1}^k N_n(t) > Q \right\}.$$

Waarin Q een maximaal voorraadniveau is en $N_n(t)$ aantal aankomsten in periode n . Want K is een positieve stochastische variabele. De verwachte waarde van K is gegeven door lemma (A.2)

$$E[K] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{K \geq k\}. \quad (\text{A.3})$$

Herschrijven van (2) geeft

$$\{K \geq k\} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} N_n \leq Q \right\}. \quad (\text{A.4})$$

Stel, $G(\cdot)$ is de verdelingsfunctie van $N(T)$ en $G^k(\cdot)$ is de k -fold convolutie¹⁰ van $G(\cdot)$

De relatie (A.4) leidt tot $P\{K \geq k\} \Leftrightarrow P\left\{ \sum_{n=1}^{k-1} N_n \leq Q \right\} = P\{N_1 + N_2 + \dots + N_{k-1} \leq Q\}$

$$P\{K \geq k\} = G^{(k-1)}(Q)$$

De gemiddelde K is bepaald

$$E[K] = \sum_{k=1}^{\infty} G^{(k-1)}(Q). \quad (\text{A.5})$$

A.3 Verwachte gemiddelde voorraden $H(Q, T)$

De gemiddelde voorraden per *aanvullende cyclus* worden benaderd door:

$$I(t) = \begin{cases} Q, & \text{als } 0 \leq t \leq T, \\ Q - N_1(T), & \text{als } T \leq t \leq 2T, \\ \dots & \\ Q - \sum_{n=1}^{K-1} N_n(T), & \text{als } (K-1)T \leq t \leq KT. \end{cases}$$

Het volgt dat $I(t) = \int_0^{KT} I(t) dt$. De verwachte voorraadkosten in een *aanvullende cyclus* is dus:

$$E[\text{Voorraadkosten per aanvullende cyclus}] = hE \left[\int_0^{KT} I(t) dt \right].$$

We definiëren $H(Q, T) = E \left[\int_0^{KT} I(t) dt \right]$ en herschrijven

¹⁰ De cumulatieve verdelingfunctie F_{X+Y} is *convolution* van verdelingfunctie F_X en F_Y

$$E[\text{Voorraadkosten per aanvullende cyclus}] = hH(Q, T).$$

De functie $H(Q, T)$ geeft de *verwachte gemiddelde voorraden* in een *aanvullende cyclus*. Waarin Q zijn de voorraden aan het begin per cyclus en T geeft de lange van een periode. Met behulp van *vernieuwingsproces* theorie kunnen we verwachting het totale aantal voorraden in een *aanvullende cyclus* $H(Q, T)$ beschrijven

$$H(Q, T) = H(Q, T | N_1(T) = i) = \begin{cases} TQ, & \text{als } i > Q, \\ TQ + H(Q - i, T) & \text{als } i \leq 0. \end{cases}$$

Dus

$$H(Q, T) = H(Q, T | N_1(T) = i) = TQ + \sum_{i=0}^Q H(Q - i, T)g(i)$$

Waarin $g(i)$ is kansdichtheid van $N(T)$

$H(Q, T)$ is een discrete *vernieuwing vergelijking*, dus citeren wij hieronder de nodige stelling voor het vinden de oplossing van een integrale vergelijking. Deze stelling wordt als *Theorem 1.1.3* gegeven in (TIJMS, 1994, pag. 5).

Theorem 1.1.3 *Assume that $F(x)$ has a probability density $f(x)$. Let $a(c)$ be a given, integral able function that is bounded on finite interval. Suppose the function $Z(t), t \geq 0$, is defined by the integral equation*

$$Z(t) = a(t) + \int_0^t Z(t-x)f(x)dx, \quad t \geq 0, \quad (1.1.7)$$

Then this equation has a unique solution that is bound in finite intervals. The solution is given by

$$Z(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)m(x)dx, \quad t \geq 0, \quad (1.18)$$

Where the renewal density $m(x)$ denotes the derivative of $M(x)$

Met behulp van stelling 1.1.3 vinden we de oplossing voor onze vergelijking

$$H(Q, T) = TQ + T \sum_{i=0}^Q (Q - i)m_g(i) \quad (\text{A.6})$$

Waarin $m_g(\cdot)$ is de *vernieuwing kansdichtheid* verbindt met kansdichtheid $g(\cdot)$ van $N(T)$

$$m_g(i) = \sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}(i).$$

A.4 Verwachte gemiddelde wachttijd $W(T)$

Want de leverancier kan niet onmiddellijk de orders van zijn klanten dienen te aanleveren. De klanten moeten wachten tot een bepaald tijdstip. Als het gevolg daarvan kan er het verliest van een klant of het verliest van goodwill van de leverancier. Deze kosten zijn tijdsafhankelijk en we definiëren

$$E[\text{kosten van nee - verkoop per aanvullende cyclus}] = wE[K]E[\text{wachttijd per periodieke verzending}]$$

...

Met illustratie van figuur 4.1 kunnen we de wachttijd per periode bepalen bij de volgende benadering

$$E[\text{wachttijd per periodieke verzending}] = wE[(T - S_1) + (T - S_2) + \dots + (T - S_{N(T)})]$$

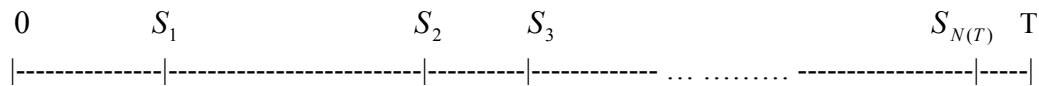
$$E[\text{wachttijd per periodieke verzending}] = wE\left[N(T)T - \sum_{n=1}^{N(T)} S_n\right].$$

We definiëren $W(T)$ als het verwachte wachttijd gedurende de *aanvullende cyclus*

$$W(T) = E\left[N(T)T - \sum_{n=1}^{N(T)} S_n\right].$$

Dus

$$E[\text{kosten van nee - verkoop per aanvullende cyclus}] = wE[K]W[T] \quad (6)$$



Figuur 4.1: Het $N(T)$ aantal orders komen binnen één *periodieke verzending*

Dus herschrijven we $W(T)$ op voorwaarde dat de tijdaankomst van eerste order $X_1 = t$ is.

$$W(T) = E_t[W(T | S_1 = t)] = \int_0^T (T - t)dF(t) + \int_0^T W(T - t)dF(t).$$

Waarin $F(t)$ verdelingsfunctie van de aankomstintervallen $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ is.

De $W(T)$ is dus een *vernieuwing vergelijking*. Door stelling 1.1.3 (zie A.6) is de oplossing

$$W(T) = v(T) + \int_0^T v(T - t)dM_F(t) \quad (A.7)$$

Waarin

$$v(T) = \int_0^T (T - t)dF(t),$$

$$M_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) = E[N(T)].$$

En $F^{(n)}(\cdot)$ de *n-fold convolutie* van $F(\cdot)$.

Bijlagen B: kostenfactors in de Poisson proces

In Bijlagen A hebben we het vernieuwingsproces en kostenparameters beschrijven. We gaan nu de aankomst proces als *Poisson proces* behandelen, dus worden vernieuwingsfunctie $M(t)$, verwachte aantal periode in een cyclus $E[K]$ verwachte gemiddelde voorraden $H(Q, T)$ en verwacht gemiddelde wachttijd $W[T]$ uitgedrukt onder *aankomstintensiteit* λ , maximaal voorraadniveau Q en tijdeenheden per periode T .

B.1 Vernieuwing *Poisson proces*

Als we het aankomstproces opvatten als een *Poisson-proces* met parameter λt , dus komen er per T tijdseenheden gemiddeld λT orders binnen.

De aankomstintervallen $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ zijn *negatief exponentieel* verdeeld met *verdelingfunctie* $F(t)$, dus

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - e^{-\lambda t} \\ dF(t) &= \lambda e^{-\lambda t} dt. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Uit (A.1) in Bijlagen A.1 hebben we de *vernieuwingsfunctie* $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$ gedefinieerd, dus

$$M_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) = E[N(t)] = \lambda t$$

Of

$$dM_F(t) = \lambda dt. \quad (\text{B.2})$$

B.2 Bepalen $E[K]$

Uit (A.3) en (A.5) in Bijlagen A.2 hebben wij

$$E[K] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{K \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} G^{(k-1)}(Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^Q \frac{(k\lambda T)^i e^{-k\lambda T}}{i!}.$$

We herschrijven

$$P\{K \leq k\} = 1 - \sum_{i=0}^Q \frac{(k\lambda T)^i e^{-k\lambda T}}{i!} \quad \text{Met } k = 1, 2, \dots$$

Aan de rechte hand is een Erlang verdelingsfunctie met *vormparameter* Q en *schaalparameter* λT , dus is het gemiddelde

$$E[K] \approx \frac{Q+1}{\lambda T}. \quad (\text{B.3})$$

B.3 Bepalen $M_G(Q)$

Bij de definitie

$$m_g(i) = M_G(i) - M_G(i-1)$$

Waarbij $M_G(i)$ *vernieuwingsfunctie* is, die met $G(\cdot)$ verbindt

$$M_G(i) = \sum_{k=1}^{\infty} G^{(k)}(i)$$

Uit (A.5) in Bijlagen A.2 en (B.3) hebben we

$$E[K] = \frac{Q+1}{\lambda T} = \sum_{k=1}^{\infty} G^{(k-1)}(Q) = \sum_{k=1}^{\infty} G^{(k)}(Q) + 1$$

We herschrijven

$$M_G(Q) = \frac{Q+1}{\lambda T} - 1. \quad (\text{B.4})$$

B.4 Bepalen $m_g(Q)$

Bij de definitie

$$m_g(i) = M_G(i) - M_G(i-1)$$

We vullen (B.4) in

$$m_g(Q) = \frac{Q+1}{\lambda T} - 1 - \left(\frac{Q}{\lambda T} - 1 \right)$$

Dus

$$m_g(Q) = \frac{1}{\lambda T}. \quad (\text{B.5})$$

B.5 Bepalen $H(Q, T)$ *Poisson proces*

Uit (A.6) in Bijlagen A.3 hebben we

$$H(Q, T) = TQ + T \sum_{i=0}^Q (Q-i) m_g(i)$$

Waarin

$$m_g(i) = \sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}(i).$$

Uit (B.5) in Bijlagen B.4 herschrijven we

Wij vullen (B.5) in (A.6) en krijgen

$$\begin{aligned} H(Q, T) &= TQ + T \sum_{i=0}^Q (Q-i) \frac{1}{\lambda T} \\ H(Q, T) &= TQ + \frac{1}{\lambda} \{Q + (Q-1) + (Q-2) + \dots + (Q-Q)\} \end{aligned}$$

Dus

$$H(Q, T) = TQ + \frac{Q(Q+1)}{2\lambda}. \quad (\text{B.6})$$

B.6 Bepalen $W(T)$ Poisson proces

Uit (A.7) in Bijlagen A.4 hebben wij

$$W(T) = v(T) + \int_0^T v(T-t) dM_F(t)$$

Waarin

$$v(T) = \int_0^T (T-t) dF(t),$$

$$M_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) = E[N(T)].$$

Allereerste zullen we $v(T) = \int_0^T (T-t) dF(t)$ berekenen. We vullen (B.1) in $v(T) = \int_0^T (T-t) dF(t)$

$$v(T) = \int_0^T (T-t) \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^T T \lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^T t \lambda e^{-\lambda t} dt$$

Want

$$\int_0^T T \lambda e^{-\lambda t} dt = T \lambda \int_0^T e^{-\lambda t} dt = T \lambda \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^T = T \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^T = T(-e^{-\lambda T} + 1) = T(1 - e^{-\lambda T})$$

En

$$\int_0^T -t \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^T t d e^{-\lambda t} = \left[t e^{-\lambda t} \right]_0^T - \int_0^T e^{-\lambda t} dt = \left[t e^{-\lambda t} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^T = T e^{-\lambda T} + \frac{e^{-\lambda T}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$$

Dus
$$v(T) = T(1 - e^{-\lambda T}) + \left(T e^{-\lambda T} + \frac{e^{-\lambda T}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) = T - T e^{-\lambda T} + T e^{-\lambda T} + \frac{e^{-\lambda T}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$$

Of

$$v(T) = T + \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda T} - 1) \quad (\text{B.7})$$

We vullen (B.6), (B.2) in $\int_0^T v(T-t) dM_F(t)$

$$\int_0^T v(T-t) dM_F(t) = \int_0^T \left[(T-t) + \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda(T-t)} - 1) \right] \lambda dt$$

Want

$$\int_0^T (T-t) \lambda dt = \lambda \left[Tt - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^T = \lambda \left[T^2 - \frac{1}{2} T^2 \right] = \frac{1}{2} \lambda T^2$$

$$\int_0^T e^{-\lambda(T-t)} dt = \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(T-t)} \right]_0^T = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda T}$$

En

$$\int_0^T -dt = [-t]_0^T = -T$$

Dus

$$\int_0^T v(T-t)dM_F(t) = \frac{1}{2}\lambda T^2 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda T} - T$$

Ten slot tellen we samen

$$W(T) = T + \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda T} - 1) + \frac{1}{2}\lambda T^2 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda T} - T$$

Dus

$$W(T) = \frac{1}{2}\lambda T^2. \quad (\text{B.8})$$

Bijlagen C: oplossingen voor voorraadmodel

Wij hebben de totale kostenfunctie per cyclus en optimaliseringsprobleem gedefinieerd in (9) en (10)

$$C(\bar{Q}, T) = \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + c_R \lambda + \frac{A_D}{T} + c_D \lambda + \frac{h \lambda T (\bar{Q} - 1)}{\bar{Q}} + \frac{h(\bar{Q} - 1)}{2} + \frac{w \lambda T}{2} \quad (9)$$

Minimaliseer $C(\bar{Q}, T)$

Onder

$$\begin{aligned} \bar{Q} &\geq 0 \\ T &\geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

C.1 Bepalen optimale $C(\bar{Q}, T)$ en $C(\bar{Q})$

Zij (\bar{Q}^*, T^*) de oplossing van (10) is, dus is onze originele oplossing $(\bar{Q}^* - 1, T^*)$, want $Q = \bar{Q} - 1$

Om het minimum van $C(\bar{Q}, T)$ te vinden, differentiëren we $C(\bar{Q}, T)$ naar \bar{Q} en T , en stellen we de partiele afgeleiden nul

$$\frac{dC(\bar{Q}, T)}{d\bar{Q}} = -\frac{A_R \lambda}{(\bar{Q})^2} + \frac{Th \lambda}{(\bar{Q})^2} + \frac{h}{2} = 0,$$

$$\frac{dC(\bar{Q}, T)}{dT} = \frac{h \lambda (\bar{Q} - 1)}{\bar{Q}} + \frac{w \lambda}{2} - \frac{A_D}{T^2} = 0.$$

De optimale waarden worden gevonden uit:

$$\bar{Q} = \sqrt{\frac{2A_R \lambda}{h} - 2\lambda T}, \quad (C.1)$$

$$T = \sqrt{\frac{2A_D \bar{Q}}{\lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}}. \quad (C.2)$$

De berekening van de optimale waarden wordt vereenvoudigd door het vullen (C.2) in (9), daardoor kunnen we $C(\bar{Q}, T)$ tot $C(\bar{Q})$ reduceren

$$C(\bar{Q}, T) = \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + c_R \lambda + \frac{A_D}{T} + c_D \lambda + \frac{h \lambda T (\bar{Q} - 1)}{\bar{Q}} + \frac{h(\bar{Q} - 1)}{2} + \frac{w \lambda T}{2}$$

$$C(\bar{Q}) = \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + c_R \lambda + \frac{A_D}{\sqrt{\lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}} + c_D \lambda + \frac{\lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}{2\bar{Q}} \sqrt{\frac{2A_D \bar{Q}}{\lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}} + \frac{h(\bar{Q} - 1)}{2}$$

$$C(\bar{Q}) = \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + c_R \lambda + \sqrt{\frac{A_D \lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}{2\bar{Q}}} + c_D \lambda + \sqrt{\frac{A_D \lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}{2\bar{Q}}} + \frac{h(\bar{Q} - 1)}{2}$$

$$C(\bar{Q}) = \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + c_R \lambda + \sqrt{\frac{2A_D \lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}{\bar{Q}}} + c_D \lambda + \frac{h(\bar{Q} - 1)}{2}$$

De totale kostenfunctie per cyclus wordt nu als volgt:

$$C(\bar{Q}) = \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + \frac{h\bar{Q}}{2} + \sqrt{\frac{2A_D \lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}{\bar{Q}}} + c_D \lambda + c_R \lambda - \frac{h}{2}$$

Wij splitsen de kosten, die met \bar{Q} zich meebrengen, in twee delen, te weten:

$$C_1(\bar{Q}) = \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + \frac{h\bar{Q}}{2}, \quad C_2(\bar{Q}) = \sqrt{\frac{2A_D \lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}{\bar{Q}}}$$

Want

$$C_2(\bar{Q}) = \sqrt{\frac{2A_D \lambda [2h(\bar{Q} - 1) + w\bar{Q}]}{\bar{Q}}} = \sqrt{2A_D \lambda (2h + w) - \frac{4A_D h \lambda}{\bar{Q}}} = \sqrt{\psi - \frac{4A_D h \lambda}{\bar{Q}}}$$

$$\text{Met } \psi = 2A_D \lambda (2h + w)$$

Dus zijn de eerste afgeleide van $C_1'(\bar{Q})$ en $C_2'(\bar{Q})$ resp.

$$C_1'(\bar{Q}) = -\frac{A_R \lambda}{\bar{Q}^2} + \frac{h}{2},$$

$$C_2'(\bar{Q}) = -2hA_D\lambda \sqrt{\frac{1}{\left(\bar{Q}\right)^3 (\psi \bar{Q} - 4hA_D\lambda)}}.$$

C.2 Bepalen Hessian & Determinant van $C(\bar{Q}, T)$

Uit (9) hebben wij

$$C(\bar{Q}, T) = \frac{A_R\lambda}{\bar{Q}} + c_R\lambda + \frac{A_D}{T} + c_D\lambda + \frac{h\lambda T(\bar{Q}-1)}{\bar{Q}} + \frac{h(\bar{Q}-1)}{2} + \frac{w\lambda T}{2} \quad (9)$$

De kostenfunctie is een multivariabele functie, de reden van deze complicatie komen uit de term

$\frac{h\lambda T(\bar{Q}-1)}{\bar{Q}}$. Dus kunnen we het minimum en het maximum bepalen met behoeve van *Hessian* matrix en *determinant* van deze matrix.

Stel we \bar{Q} als een continue variabele, dus de Hessian van $C(\bar{Q}, T)$, door C aangeduid, wordt bepaald als

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{2\lambda(A_R - hT)}{\left(\bar{Q}\right)^3} & \frac{h\lambda}{\left(\bar{Q}\right)^2} \\ h\lambda & \frac{2A_D}{T^3} \\ \frac{h\lambda}{\left(\bar{Q}\right)^2} & \frac{2A_D}{T^3} \end{bmatrix}.$$

De determinant van $[C]$ wordt daarom gegeven door

$$\det[C] = \frac{4\lambda A_D (A_R - hT) \bar{Q} - h^2 \lambda^2 T^3}{\left(\bar{Q}\right)^4 T^3}. \quad (C.3)$$

C.4 Bepalen grenzen van Q^*

Wij kunnen de grenzen van Q^* uit volgende ongelijking bepalen

$$\sqrt{\frac{2A_R\lambda}{h}} - 2\lambda\sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}} \leq Q^* \leq \sqrt{\frac{2A_R\lambda}{h}}. \quad (\text{C.4})$$

Bewijs:

Als

$$C'(1) = C_1'(1) + C_2'(1) \leq 0$$

Of

$$-\sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}} \leq \frac{A_R\lambda}{h} - \frac{1}{2}$$

Dan vandoen (Q^*, T^*) (C.1) en (C.2)

Dus

$$T^* \leq \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}}$$

Want

$$Q^* = 1 \text{ en } T^* = \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}}$$

Wij vullen $T^* = \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}}$ in C(1) en krijgen (C.4)

C.5 Schatting voor Q^* m.b.v. EOQ-formule

Als \bar{Q} groot is, dus wordt de $\frac{h\lambda T(\bar{Q}-1)}{\bar{Q}}$ naar $h\lambda T$ benaderd. Wij kunnen de vergelijking (9)

herschrijven

$$C(\bar{Q}, T) = \frac{A_R\lambda}{\bar{Q}} + c_R\lambda + \frac{A_D}{T} + c_D\lambda + h\lambda T + \frac{h(\bar{Q}-1)}{2} + \frac{w\lambda T}{2} \quad (\text{C.5})$$

$C(\bar{Q}, T)$ is een verbonden convex in \bar{Q} en T en de globale minimum is

$$\bar{Q} = \sqrt{\frac{2A_R\lambda}{h}}, \quad T = \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda(w+2h)}}. \quad (\text{C.6})$$

We merken dat de formule voor \bar{Q} precies de *EOQ-formule* is.