

Optimaliseren van cranklengte en trapfrequentie bij fietsen

BWI-werkstuk

Guido Kaandorp

Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit Amsterdam

Augustus 2006

Voorwoord

Een onderdeel van de opleiding Bedrijfskunde en Informatica aan de Vrije Universiteit is het schrijven van het BWI-werkstuk. Dit werkstuk betreft een literatuuronderzoek dat raaklijnen dient te hebben met één of meer van de onderdelen Bedrijfskunde, Wiskunde en Informatica waar de studie BWI uit bestaat. Voor mijn werkstuk leek het mij leuk om voor een ander onderwerp te kiezen dan dat doorgaans aan bod kwam tijdens mijn studie.

In de wielersport wordt er veel gedaan om de fietsprestatie en efficiëntie te verbeteren. In de meeste onderzoeken naar fietsprestaties worden wielrenners aan de hand van allerlei meetapparatuur experimenteel onderzocht. Zo wordt in windtunnels onderzoek gedaan om de meest aërodynamische fietshouding te bepalen en heb je verschillende typen fietsen voor verschillende disciplines (bijv. een fiets voor tijdritten in de Tour de France).

Het leek mij leuk om te kijken hoe je op een theoretische manier het optimaliseren van de fietsprestatie kunt onderzoeken. Er zijn veel verschillende variabelen die hierbij een rol spelen (o.a. houding, zadelhoogte, stuurhoogte, cranklengte, trapfrequentie). Het onderzoek wordt te complex als alle variabelen meegenomen worden. Daarom beperk ik mij in dit verslag tot de cranklengte en trapfrequentie. Het is evident dat deze twee variabelen nauw met elkaar samenhangen.

Ik wil Rob van der Mei bedanken voor de begeleiding en wens iedereen veel plezier met het lezen van het verslag!

Guido Kaandorp

Augustus 2006

Samenvatting

In dit verslag wordt op een theoretische manier bekeken hoe de cranklengte en trapfrequentie te maken hebben met de fietsprestatie. In de literatuur van Hull e.a. [3, 4, 5] wordt, voor een vast gegeven geleverd vermogen¹ (die bij de trap-as ontwikkeld moet worden) aan de hand van (kracht)momenten van de heup, knie en enkel, bepaald wat de optimale combinatie is van de cranklengte en de trapfrequentie. De momenten -tot de macht twee- vallen vrijwel samen met de te leveren spierspanning, waardoor het minimaliseren van een op momenten gebaseerde kostenfunctie overeenkomt met het minimaliseren van de te leveren spierspanning en daarmee de hoeveelheid energie die de wielrenner verbruikt.

Een model dat de benen van een wielrenner modelleert in het 2 dimensionale vlak (hoogte en breedte), wordt opgesteld. Met dit model kan voor een willekeurige vaste hoek die de crank maakt, de posities, snelheden en versnellingen van de voet, het dijbeen en het scheenbeen bepaald worden, welke nodig zijn voor het berekenen van de momenten. Naast dit model zijn nog allerlei invoergegevens nodig. In Hull e.a. [4] worden drie verschillende proefpersonen gebruikt met verschillende lengtes. Ook de positie van het zadel en tot slot de cranklengte en trapfrequentie zijn benodigd. De op momenten gebaseerde kostenfunctie (MCF) wordt berekend over één volledige omwenteling van de crank, per stapjes van 5 graden. De cranklengte en trapfrequentie worden gevarieerd, totdat de optimale combinatie gevonden is waarvoor de MCF minimaal is.

Hull e.a. [4] vinden bij een vermogen van 100 watt per been (dit correspondeert met ongeveer 32 km/uur) een optimum voor de kleine man bij een trapfrequentie van 120 omwentelingen per minuut (OPM) en een cranklengte van 140 mm. Deze waarden komen voor de gemiddelde man op 110 OPM en 145 mm en voor de grote man op 100 OPM en 150 mm. Hull e.a. laten echter enkele gaten in hun model open en sommige gebruikte formules zijn inconsequent. Hierdoor is het onmogelijk de resultaten te valideren.

Vanwege deze gebreken is er een eigen model gebouwd waar de gebreken opgevuld worden. De gaten in het model van Hull betreffen de voetpositie en de pedaalkracht en hoe deze zich verhouden gedurende een omwenteling van de crank. Verschillende scenario's zijn opgesteld, waarbij de voetpositie en de pedaalkracht steeds verschillen. De voetpositie over een omwenteling van de crank, zegt iets over hoe de wielrenner op de fiets zit. De pedaalkracht over een omwenteling van de crank, zegt iets over kracht verdeling. De verschillen tussen de resultaten van de verschillende scenarios blijken erg groot te zijn. Dit betekent dat de manier van fietsen erg veel invloed heeft op de optimale trapfrequentie en cranklengte.

Op een wiskundige manier naar fietsen kijken is niet mogelijk zonder goede aannames te maken. Echter, het maken van de juiste aannames is erg lastig. Dit bleek onderandere uit het feit dat sommige resultaten uit eigen onderzoek niet overeenkwamen met de verwachting. Hiervoor moet voldoende empirisch onderzoek worden uitgevoerd. Een puur theoretisch wiskundige kijk op fietsen is dus onmogelijk. Om de meest efficiënte fietsbeweging te bepalen zouden dus empirisch en theoretisch wiskundig onderzoek goed op elkaar afgestemd moeten worden.

¹Het geleverd vermogen is een functie van de cranklengte, trapfrequentie en de pedaalkracht. Er zijn heel veel combinaties van de cranklengte en trapfrequentie mogelijk om het gewenste vermogen te leveren.

Inhoudsopgave

Voorwoord	iii
Samenvatting	v
Terminologie	3
1 Introductie	5
2 Literatuur studie	7
2.1 Methode	7
2.2 Model formulering	8
2.3 Model analyse	9
2.3.1 Hoeken bepalen	10
2.3.2 Hoeksnelheden en hoekversnellingen bepalen	11
2.3.3 Versnelling van het dijbeen, scheenbeen en de voet bepalen	13
2.4 Momenten	14
2.5 Resultaten	15
3 Eigen studie	17
3.1 Voetpositie	17
3.2 Pedaalkracht	18
3.3 Implementatie en resultaten	18
4 Conclusies	25
Referenties	27
A Gemodelleerde fietsbeweging	29
B Resultaten	31

Terminologie

L_d	- Lengte (m) dijbeen
L_s	- Lengte (m) scheenbeen
L_v	- Lengte (m) voet
L_c	- Lengte (m) crank
L_y	- Vertikale afstand (m) heup/zadel tot trapas
L_x	- Horizontale afstand (m) heup/zadel tot trapas
$\epsilon_d, \dot{\epsilon}_d, \ddot{\epsilon}_d$	- Hoek (rad), hoeksnelheid (rad/s), hoekversnelling (rad/s^2) - bij de heup van het dijbeen ²
$\epsilon_s, \dot{\epsilon}_s, \ddot{\epsilon}_s$	- Hoek (rad), hoeksnelheid (rad/s), hoekversnelling (rad/s^2) - bij de knie van het scheenbeen ²
$\epsilon_v, \dot{\epsilon}_v, \ddot{\epsilon}_v$	- Hoek (rad), hoeksnelheid (rad/s), hoekversnelling (rad/s^2) - bij de enkel van de voet ²
$\alpha, \dot{\alpha}$	- Hoek (rad), hoeksnelheid (rad/s) bij de trap-as van de crank ²
D_d	- Afstand (m) van heup tot zwaartepunt dijbeen
D_s	- Afstand (m) van knie tot zwaartepunt scheenbeen
D_v	- Afstand (m) van enkel tot zwaartepunt voet
P_{dx}, P_{dy}	- Resp. horizontale en verticale positie (m) van zwaartepunt dijbeen
P_{sx}, P_{sy}	- Resp. horizontale en verticale positie (m) van zwaartepunt scheenbeen
P_{vx}, P_{vy}	- Resp. horizontale en verticale positie (m) van zwaartepunt voet
A_{dx}, A_{dy}	- Resp. horizontale en verticale versnelling (m/s^2) van zwaartepunt dijbeen
A_{sx}, A_{sy}	- Resp. horizontale en verticale versnelling (m/s^2) van zwaartepunt scheenbeen
A_{vx}, A_{vy}	- Resp. horizontale en verticale versnelling (m/s^2) van zwaartepunt voet
M_h	- Moment (Nm) van de heup
M_k	- Moment (Nm) van de knie
M_e	- Moment (Nm) van de enkel
T	- De tijd (s) voor één omwenteling van de crank
PF_n	- De pedaalkracht (N) loodrecht op de crank
PF_x	- Het horizontale component van de pedaalkracht (N)
PF_y	- Het verticale component van de pedaalkracht (N)

²

²De hoek, gemeten vanaf verticaal beneden en tegen de klok in

1 Introductie

In de wielersport wordt veel gedaan om fietsprestaties en efficiëntie te verbeteren. De meeste onderzoeken zijn op experimentele wijze gedaan door bewegingswetenschappers.

In dit verslag wordt juist op een theoretische manier bekeken hoe de cranklengte en trapfrequentie te maken hebben met de fietsprestatie. Voor een gegeven geleverd vermogen wordt aan de hand van (kracht)momenten van de heup, knie en enkel bekeken wat de optimale combinatie van cranklengte en trapfrequentie is.

In hoofdstuk 2 wordt, aan de hand van literatuur van Hull e.a. [3, 4, 5], naar het model en de methodes gekeken om de optimale combinatie van cranklengte en trapfrequentie te bepalen.

Omdat in de literatuur van Hull e.a. enkele gaten in het model zijn overgebleven, die niet uitgelegd en/of beschreven worden (enkele gebruikte formules blijken bovendien inconsequent te zijn), is het onmogelijk de resultaten te valideren. Daarom worden de gaten in het model zelf aangevuld waardoor eigen resultaten worden verkregen. Dit alles wordt beschreven in hoofdstuk 3. In hoofdstuk 4 wordt tenslotte de conclusies gegeven.

2 Literatuur studie

In de wielersport is van belang dat de wielrenners optimaal presteren. Om dit te bereiken is het belangrijk om te zorgen dat deze sporters hun krachten zo efficiënt mogelijk benutten. Voor de analyse van de gebruikte krachten tijdens het fietsen kan gebruik worden gemaakt van een wiskundig model. Hier wordt gebruikgemaakt van een in de literatuur beschreven model. De wiskundige methode uit dit literatuurmodel wordt uitgelegd in sectie 2.1. Daarna wordt in sectie 2.2 de modelformulering beschreven, waarin de gebruikte variabelen worden verklaard. In het model staan functies voor het berekenen het heup- en knie moment. Deze zijn gebaseerd op onderandere de versnellingen die optreden tijdens de fietsbeweging. De analyse hiervan wordt beschreven sectie 2.3. Na de analyse van de tijdens de fietsbeweging optredende versnellingen kunnen de momenten worden bepaald door middel van een Free-body diagram. Dit wordt gedaan in sectie 2.4. Tenslotte worden in sectie 2.5 de resultaten uit de literatuur besproken.

2.1 Methode

In de wielersport is van belang dat de wielrenners optimaal presteren. Om dit te bereiken is het belangrijk om te zorgen dat deze sporters hun krachten zo efficiënt mogelijk benutten. Voor de analyse van de gebruikte krachten tijdens het fietsen kan gebruik worden gemaakt van een wiskundig model. Het in de literatuur beschreven model heeft twee parameters die optimaal gekozen moeten worden: de trapfrequentie van de wielrenner en de cranklengte. Dit model wordt toegepast voor een vaste snelheid, wat neerkomt op een vast geleverd vermogen die bij de trapas ontwikkeld moet worden. De parameters, trapfrequentie van de wielrenner en de cranklengte, worden geoptimaliseerd doormiddel van een doelstellingsfunctie, Moment Cost Function (MCF) genoemd, waarvan de waarde zo laag mogelijk moet zijn. Deze functie maakt gebruik van de (draai)momenten van heup, knie en enkel om te bepalen hoeveel krachtinspanning een wielrenner gemiddeld levert gedurende een omwenteling van de crank. De spierspanning kan volgens Redfield e.a. [5] direct afgeleid worden uit de momenten van de heup, knie en enkel. Een moment is simpel gezegd een kracht maal arm ($M = Fr$), waarbij de kracht massa maal versnelling is ($F = ma$). Massa's en lengtes zijn vaste getallen die vooraf bepaald horen te worden (o.a. massa's en lengtes van dijbeen, scheenbeen en voet). De spiervermoeidheid verhoudt zich met de spierspanning tot een macht tussen de 1.5 en 5 (Crowninshield and Brand [1]). De MCF optimaliseert dus behalve de momenten ook de krachten in de heup, knie en enkel en dus daarmee de geleverde krachtinspanning en daaruit volgende vermoeidheid. De mate van vermoeidheid is uiteraard bepalend voor de prestaties van de wielrenner. De Moment Cost Function ziet er daarom als volgt uit:

$$MCF(L_c, T) = \frac{1}{T} \int_0^T (M_k(t)^2 + M_h(t)^2) dt \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_{ki}^2 + M_{hi}^2 \quad (1)$$

De momenten staan gekwadrateerd in de MCF vanwege de eerder beschreven verhouding tussen spiervermoeidheid en spierspanning. In deze formule is T de tijd voor één omwenteling van de

crank, N het aantal metingen (bijv. bij elke 5 graden meten geeft $N = 360/5 = 72$) en $M_k(t)$, $M_h(t)$ zijn respectievelijk de functies voor knie- en heupmoment. In de MCF komen alleen het knie- en heupmoment voor. De gedachte hierachter is dat uit ervaring blijkt dat alleen de vermoeidheid van de bovenbeenspieren de fietsprestatie verminderd [4].

Deze kostenfunctie moet, zoals eerder gezegd, geminimaliseerd worden voor een gegeven vermogen bij de crank, om de gegeven fietssnelheid te realiseren. Het vermogen is kracht vermenigvuldigd met snelheid. Het geleverd vermogen op tijdstip t in de omwenteling van de crank wordt daarom gegeven door:

$$P(t) = PF_n(t)L_c2\pi/T \quad (2)$$

met $PF_n(t)$ het component van de pedaalkracht loodrecht op de crank, L_c de cranklengte, T de tijd voor één omwenteling en $L_c2\pi/T$ de afstand die het pedaal per seconde aflegt. Om het gemiddeld geleverd vermogen te berekenen moet vergelijking (2) geïntegreerd worden over de tijd, oftewel over één omwenteling van de crank (de trapfrequentie blijft constant over de tijd):

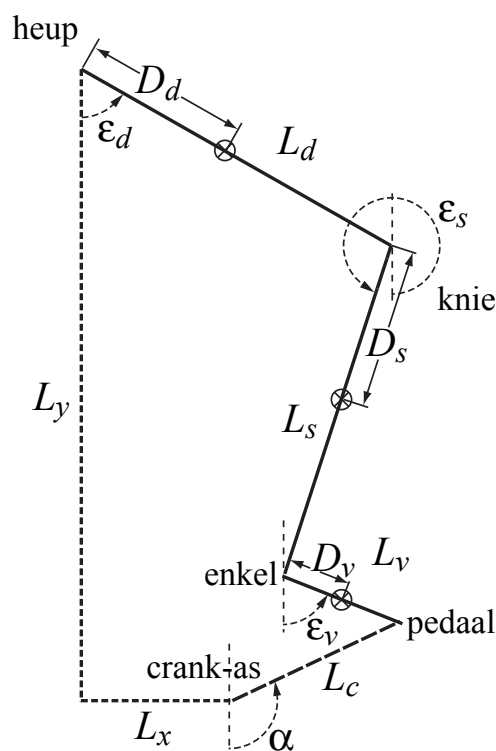
$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T PF_n(t)L_c2\pi/T dt = \frac{L_c2\pi}{T^2} \int_0^T PF_n dt \quad (3)$$

De pedaalkracht (PF_n) is het resultaat van de spierinspanning en dus van de momenten. Zoals blijkt uit vergelijking (2) en 3 hangt de pedaalkracht af van zowel de cranklengte als de trapfrequentie.

Bij een vast vermogen en vaste cranklengte geldt: hoe groter de trapfrequentie, hoe kleiner de pedaalkracht die nodig is. Maar in dat geval moeten de benen snellere omwentelingen maken, wat leidt tot een grotere dynamische actie (wat extra energie kost). Bij erg grote trapfrequenties (van meer dan 130 omwentelingen per minuut) en bij erg lage trapfrequenties (minder dan 70 OPM) stijgt de dynamische actie zo significant ten opzichte van de momenten, dat 130 en 70 respectievelijk de boven- en ondergrens zijn van de te bepalen optimale trapfrequentie. Bij een vast vermogen en vaste trapfrequentie geldt wederom: hoe groter de cranklengte, hoe kleiner de pedaalkracht die de spieren hoeven te leveren. Echter, daarbij moeten de benen grotere omwentelingen maken, wat leidt tot een grotere dynamische actie. Ook de cranklengte wordt gelimiteerd en wel tussen de 140 en 200 mm. De juiste balans moet dus opgemaakt worden tussen de te leveren pedaalkracht en de dynamische actie, door de cranklengte en trapfrequentie te variëren. De optimale combinatie tussen de te leveren pedaalkracht en dynamische actie ligt op het punt waar de Moment Cost Function (1) minimaal is.

2.2 Model formulering

De fietsbeweging van een been kan in een twee-dimensionaal vlak gemodelleerd worden aan de hand van een ‘5-bar linkage model’ (Hull en Jorge [3]), met als scharnierpunten de heup (h), knie (k), enkel (e), trap-as (o) en pedaal (p). De verbindingsstukken zijn het dijbeen (d), scheenbeen



Figuur 1: 5-bar linkage model

(s), voet (v) en crank (c). Het stationair verbindingsstuk is de fiets zelf. Zie figuur 1 voor een grafische illustratie.

ϵ_d is de hoek bij de heup die het dijbeen maakt met de verticale as, ϵ_s is de hoek bij de knie die het scheenbeen maakt met de verticale as, ϵ_v is de hoek bij de enkel die de voet maakt met de verticale as en α is de hoek bij de trap-as die de crank maakt met de verticale as. L_d , L_s , L_v en L_c zijn de lengtes van respectievelijk het dijbeen, scheenbeen, voet en crank. L_x en L_y zijn respectievelijk de horizontale en verticale afstand van heup tot trap-as. D_d , D_s en D_v zijn de lengtes tot het zwaartepunt van respectievelijk het dijbeen, scheenbeen en de voet.

2.3 Model analyse

In de volgende subsectie worden eerst alle hoeken als functie van de tijd bepaald. Daarna kunnen door middel van differentiatie alle hoeksnelheden en hoekversnellingen bepaald worden. Nadat al deze functies vastgelegd zijn, staat de fietsbeweging van de benen helemaal vast en kunnen ook de versnellingen van het dijbeen, scheenbeen, en de voet worden bepaald. Deze versnellingen zijn nodig om de MCF te bepalen.

2.3.1 Hoeken bepalen

Aangenomen wordt dat de hoeksnelheid van de crank constant is. Hierdoor is de hoek van de crank $\alpha(t)$ een lineaire functie over de tijd:

$$\alpha(t) = -2\pi t / T \quad (4)$$

Het minusteken wordt gebruikt doordat hoek α in het model de hoek tegen de klok in wordt genomen en de fietsbeweging juist met de klok mee is. Om de overige hoeken te bepalen worden een aantal vergelijkingen opgesteld.

De vectorsom van alle 2-dimensionale verbindingstukken (uit figuur 1) is 0. De op deze wijze verkregen 'loop'-vergelijking ziet er als volgt uit ($i^2 = -1$):

$$L_d e^{i\epsilon_d(t)} + L_s e^{i\epsilon_s(t)} + L_v e^{i\epsilon_v(t)} - L_c e^{i\alpha(t)} + L_x e^{i\frac{3}{2}\pi} + L_y e^{i\pi} = 0 \quad (5)$$

Deze vergelijking kan uitgesplitst worden naar verticale en horizontale verplaatsing:

$$L_d \cos(\epsilon_d(t)) + L_s \cos(\epsilon_s(t)) + L_v \cos(\epsilon_v(t)) - L_c \cos(\alpha(t)) - L_y = 0 \quad (6)$$

$$L_d \sin(\epsilon_d(t)) + L_s \sin(\epsilon_s(t)) + L_v \sin(\epsilon_v(t)) - L_c \sin(\alpha(t)) - L_x = 0 \quad (7)$$

Om voor een willekeurig tijdstip de houding van het been te kunnen bepalen (m.a.w het bepalen van de functies $\epsilon_d(t)$, $\epsilon_s(t)$ en $\epsilon_v(t)$), is naast deze twee bovenstaande vergelijkingen (6) en (7), nog een derde vergelijking nodig. In Hull and Jorge [3] wordt deze verkregen door de functie van hoek van de voet $\epsilon_v(t)$ vast te zetten aan de hand van een Fourier-serie, die geschat wordt met behulp van verkregen data uit meetapparatuur (een pedaal dynamometer [2]). De Fourier-serie bevat een constante plus een enkele sinus met een frequentie gelijk aan T , maar wordt nergens expliciet gegeven. Dit is het eerste gat uit het model welke in hoofdstuk 3 zelf opgevuld wordt. Vanaf nu wordt verondersteld dat de functies van de hoek, hoeksnelheid en hoekversnelling ($\epsilon_v(t)$, $\dot{\epsilon}_v(t)$ en $\ddot{\epsilon}_v(t)$) van de voet gegeven zijn.

Nu $\epsilon_v(t)$ voor ieder tijdstip bekend is kan met vergelijkingen (6) en (7) $\epsilon_d(t)$ en $\epsilon_s(t)$ bepaald worden. Hiervoor worden eerst vergelijkingen (6) en (7) herschreven tot:

$$L_s \cos(\epsilon_s(t)) = (A - B) - L_d \cos(\epsilon_d(t)). \quad (8)$$

$$L_s \sin(\epsilon_s(t)) = (C - D) - L_d \sin(\epsilon_d(t)). \quad (9)$$

met $A = L_y + L_c \cos(\alpha(t))$, $B = L_v \cos(\epsilon_v(t))$, $C = L_x + L_c \sin(\alpha(t))$, $D = L_v \sin(\epsilon_v(t))$. Deelt men beide kanten van vergelijking (9) door die van vergelijking (8) en neemt men hier de inverse van de tangens van, dan verkrijgt men de functie $\epsilon_s(t)$:

$$\epsilon_s(t) = \arctan \left[\frac{(C - D) - L_d \sin(\epsilon_d(t))}{(A - B) - L_d \cos(\epsilon_d(t))} \right] \quad (10)$$

Voor $\epsilon_d(t)$ worden vergelijkingen (8) en (9) aan beide kanten gekwadrateerd en bij elkaar opgeteld. Zo wordt de volgende vergelijking verkregen:

$$L_s^2 \cos^2(\epsilon_s(t)) + L_s^2 \sin^2(\epsilon_s(t)) = [(A - B) - L_d \cos(\epsilon_d(t))]^2 + [(C - D) - L_d \sin(\epsilon_d(t))]^2,$$

hetgeen equivalent is aan

$$L_s^2 = [(A - B) - L_d \cos(\epsilon_d(t))]^2 + [(C - D) - L_d \sin(\epsilon_d(t))]^2.$$

Alles naar één kant brengen en herschrijven geeft:

$$\begin{aligned} 0 &= (A - B)^2 - 2L_d(A - B) \cos(\epsilon_d(t)) + L_d^2 \cos^2(\epsilon_d(t)) \\ &\quad + (C - D)^2 - 2L_d(C - D) \sin(\epsilon_d(t)) + L_d^2 \sin^2(\epsilon_d(t)) - L_s^2 \\ &= (A - B)^2 + (C - D)^2 + L_d^2 - L_s^2 - 2L_d(A - B) \cos(\epsilon_d(t)) - 2L_d(C - D) \sin(\epsilon_d(t)) \\ &= E - F \cos(\epsilon_d(t)) - G \sin(\epsilon_d(t)) \\ &= E \left[\sin^2\left(\frac{1}{2}\epsilon_d(t)\right) + \cos^2\left(\frac{1}{2}\epsilon_d(t)\right) \right] - F \left[\cos^2\left(\frac{1}{2}\epsilon_d(t)\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\epsilon_d(t)\right) \right] - G \sin(\epsilon_d(t)) \\ &= (E + F) \sin^2\left(\frac{1}{2}\epsilon_d(t)\right) - 2G \sin\left(\frac{1}{2}\epsilon_d(t)\right) \cos\left(\frac{1}{2}\epsilon_d(t)\right) + (E - F) \cos^2\left(\frac{1}{2}\epsilon_d(t)\right) \\ &= (E + F) \tan^2\left(\frac{1}{2}\epsilon_d(t)\right) - 2G \tan\left(\frac{1}{2}\epsilon_d(t)\right) + (E - F) \end{aligned}$$

waarbij $E = (A - B)^2 + (C - D)^2 + L_d^2 - L_s^2$, $F = 2L_d(A - B)$ en $G = 2L_d(C - D)$ is.

Hieruit kan $\epsilon_d(t)$ verkregen worden:

$$\epsilon_d(t) = 2 \arctan \left[\frac{2G + \sqrt{(2G)^2 - 4(E + F)(E - F)}}{2(E + F)} \right] \quad (11)$$

De ‘minus’ oplossing vervalt omdat daaruit een negatieve hoek komt. Hierdoor zou het scheenbeen naar achteren gericht zijn. De knie moet dan verder helemaal gestrekt zijn om dit op te vangen, wat voor een gezonde wielrenner natuurlijk onmogelijk is.

2.3.2 Hoeksnelheden en hoekversnellingen bepalen

De functie voor de hoeksnelheid van de crank ($\dot{\alpha}(t)$) wordt verkregen door de eerste afgeleide van $\alpha(t)$ (4) te nemen en is $\dot{\alpha}(t) = -2\pi/T$ en dus constant over t . De functies voor de hoekversnelling van de crank is gelijk aan 0. De hoeksnelheid en hoekversnelling van de voet ($\dot{\epsilon}_v(t)$ en $\ddot{\epsilon}_v(t)$) worden verondersteld te zijn gegeven.

Om de hoeksnelheden van de hoeken van het dijbeen en het scheenbeen te bepalen worden de ‘loop’-vergelijkingen (6) en (7) gedifferentieerd:

$$\begin{aligned} -L_d \sin(\epsilon_d(t))\dot{\epsilon}_d(t) - L_s \sin(\epsilon_s(t))\dot{\epsilon}_s(t) - L_v \sin(\epsilon_v(t))\dot{\epsilon}_v(t) + L_c \sin(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) &= 0 \\ L_d \cos(\epsilon_d(t))\dot{\epsilon}_d(t) + L_s \cos(\epsilon_s(t))\dot{\epsilon}_s(t) + L_v \cos(\epsilon_v(t))\dot{\epsilon}_v(t) - L_c \cos(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) &= 0, \end{aligned}$$

hetgeen equivalent is aan

$$L_d \sin(\epsilon_d(t))\dot{\epsilon}_d(t) + L_s \sin(\epsilon_s(t))\dot{\epsilon}_s(t) = Q_1 \quad (12)$$

$$L_d \cos(\epsilon_d(t))\dot{\epsilon}_d(t) + L_s \cos(\epsilon_s(t))\dot{\epsilon}_s(t) = Q_2. \quad (13)$$

met $Q_1 = -L_v \sin(\epsilon_v(t))\dot{\epsilon}_v(t) + L_c \sin(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)$ en $Q_2 = -L_v \cos(\epsilon_v(t))\dot{\epsilon}_v(t) + L_c \cos(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)$.

De functies voor de hoeksnelheden $\dot{\epsilon}_d(t)$ en $\dot{\epsilon}_s(t)$ kunnen uit de vergelijkingen (12) en (13) verkregen worden met behulp van de ‘Cramers rule’. De Cramers rule is als volgt:

Cramers rule *Laat A een inverteerbare $n \times n$ matrix zijn. Voor elke $b \in \mathbb{R}^n$, de unieke oplossing x van $Ax = b$ wordt gegeven door*

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Voert men op vergelijkingen (12) en (13) de Cramers rule uit, dan wordt

$$A = \begin{pmatrix} L_d \sin(\epsilon_d(t)) & L_s \sin(\epsilon_s(t)) \\ L_d \cos(\epsilon_d(t)) & L_s \cos(\epsilon_s(t)) \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_d(t) \\ \dot{\epsilon}_s(t) \end{pmatrix} \text{ en } b = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}.$$

De functies van de hoeksnelheden $\dot{\epsilon}_d(t)$ en $\dot{\epsilon}_s(t)$ worden nu gegeven door onderstaande twee formules:

$$\dot{\epsilon}_d(t) = \frac{Q_1 L_s \cos(\epsilon_s(t)) - Q_2 L_s \sin(\epsilon_s(t))}{L_d \sin(\epsilon_d(t)) L_s \cos(\epsilon_s(t)) - L_s \sin(\epsilon_s(t)) L_d \cos(\epsilon_d(t))} \quad (14)$$

en

$$\dot{\epsilon}_s(t) = \frac{Q_2 L_d \sin(\epsilon_d(t)) - Q_1 L_d \cos(\epsilon_d(t))}{L_d \sin(\epsilon_d(t)) L_s \cos(\epsilon_s(t)) - L_s \sin(\epsilon_s(t)) L_d \cos(\epsilon_d(t))}. \quad (15)$$

Om de functies van de hoekversnellingen van het dijbeen en het scheenbeen ($\ddot{\epsilon}_d(t)$ en $\ddot{\epsilon}_s(t)$) te bepalen worden de ‘loop’-vergelijkingen (6) en (7) voor de tweede keer gedifferentieerd. Dit geeft:

$$\begin{aligned} -L_d \cos(\epsilon_d(t))\dot{\epsilon}_d(t)^2 - L_d \sin(\epsilon_d(t))\ddot{\epsilon}_d(t) - L_s \cos(\epsilon_s(t))\dot{\epsilon}_s(t)^2 - L_s \sin(\epsilon_s(t))\ddot{\epsilon}_s(t) \\ - L_v \cos(\epsilon_v(t))\dot{\epsilon}_v(t)^2 - L_v \sin(\epsilon_v(t))\ddot{\epsilon}_v(t) + L_c \cos(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)^2 &= 0 \\ -L_d \sin(\epsilon_d(t))\dot{\epsilon}_d(t)^2 + L_d \cos(\epsilon_d(t))\ddot{\epsilon}_d(t) - L_s \sin(\epsilon_s(t))\dot{\epsilon}_s(t)^2 + L_s \cos(\epsilon_s(t))\ddot{\epsilon}_s(t) \\ - L_v \sin(\epsilon_v(t))\dot{\epsilon}_v(t)^2 + L_v \cos(\epsilon_v(t))\ddot{\epsilon}_v(t) + L_c \sin(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)^2 &= 0, \end{aligned}$$

hetgeen equivalent is aan

$$L_d \sin(\epsilon_d(t)) \ddot{\epsilon}_d(t) + L_s \sin(\epsilon_s(t)) \ddot{\epsilon}_s(t) = Q_3 \quad (16)$$

$$L_d \cos(\epsilon_d(t)) \dot{\epsilon}_d(t) + L_s \cos(\epsilon_s(t)) \dot{\epsilon}_s(t) = Q_4, \quad (17)$$

met $Q_3 = -L_d \cos(\epsilon_d(t)) \dot{\epsilon}_d(t)^2 - L_s \cos(\epsilon_s(t)) \dot{\epsilon}_s(t)^2 - L_v \cos(\epsilon_v(t)) \dot{\epsilon}_v(t)^2 - L_v \sin(\epsilon_v(t)) \dot{\epsilon}_v(t) + L_c \cos(\alpha(t)) \dot{\alpha}(t)^2$ en $Q_4 = L_d \sin(\epsilon_d(t)) \dot{\epsilon}_d(t)^2 + L_s \sin(\epsilon_s(t)) \dot{\epsilon}_s(t)^2 + L_v \sin(\epsilon_v(t)) \dot{\epsilon}_v(t)^2 - L_v \cos(\epsilon_v(t)) \dot{\epsilon}_v(t) - L_c \sin(\alpha(t)) \dot{\alpha}(t)^2$.

De $\ddot{\alpha}(t)$ componenten (hoekversnelling van de crank) van bovenstaande vergelijking vervallen, omdat aangenomen wordt dat de hoeksnelheid van de crank constant is.

Om nu $\ddot{\epsilon}_d(t)$ en $\ddot{\epsilon}_s(t)$ te bepalen kan wederom de Cramers rule gebruikt worden. Voert men de Cramers rule uit op vergelijkingen (16) en (17), dan wordt de functie gevonden voor $\ddot{\epsilon}_d(t)$ en $\ddot{\epsilon}_s(t)$:

$$\ddot{\epsilon}_d(t) = \frac{Q_3 L_s \cos(\epsilon_s(t)) - Q_4 L_s \sin(\epsilon_s(t))}{L_d \sin(\epsilon_d(t)) L_s \cos(\epsilon_s(t)) - L_s \sin(\epsilon_s(t)) L_d \cos(\epsilon_d(t))} \quad (18)$$

en

$$\ddot{\epsilon}_s(t) = \frac{Q_4 L_d \sin(\epsilon_d(t)) - Q_3 L_d \cos(\epsilon_d(t))}{L_d \sin(\epsilon_d(t)) L_s \cos(\epsilon_s(t)) - L_s \sin(\epsilon_s(t)) L_d \cos(\epsilon_d(t))}. \quad (19)$$

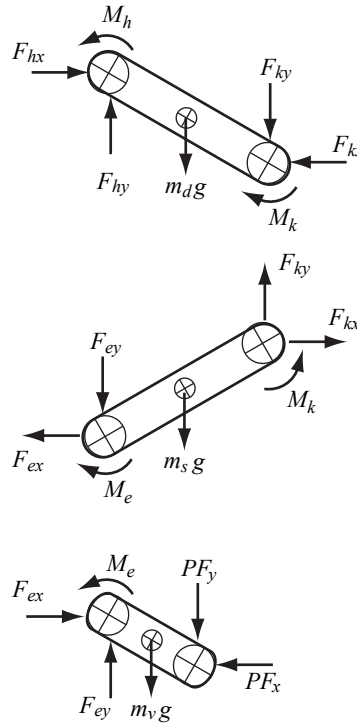
2.3.3 Versnelling van het dijbeen, scheenbeen en de voet bepalen

Nu alle hoeken, hoeksnelheden en hoekversnellingen op ieder tijdstip vastliggen, is de fietbeweging helemaal vast gelegd. Dus ook de versnellingen die de zwaartepunten van het dijbeen, het scheenbeen en de voet op een bepaald tijdstip hebben staan vast. Deze versnellingen zijn nodig om de momenten uit te rekenen. Om de versnellingen te bepalen worden eerst de vergelijkingen voor de posities van de verschillende zwaartepunten bepaald, waarna deze twee keer gediifferentieerd worden. Wederom wordt de vergelijkingen uitgesplitst in een horizontaal (x) en een verticaal (y) gedeelte. Voor de heup wordt positie $(0, 0)$ genomen. De positie en versnelling van het zwaartepunt van het dijbeen worden daarom:

$$\begin{aligned} \text{Horizontale positie dijbeen:} & \quad P_{dx}(t) = \sin(\epsilon_d(t)) D_d \\ \text{Verticale positie dijbeen:} & \quad P_{dy}(t) = -\cos(\epsilon_d(t)) D_d \\ \text{Horizontale versnelling dijbeen:} & \quad A_{dx}(t) = [-\sin(\epsilon_d(t)) \dot{\epsilon}_d(t)^2 + \cos(\epsilon_d(t)) \ddot{\epsilon}_d(t)] D_d \\ \text{Verticale versnelling dijbeen:} & \quad A_{dy}(t) = [\cos(\epsilon_d(t)) \dot{\epsilon}_d(t)^2 + \sin(\epsilon_d(t)) \ddot{\epsilon}_d(t)] D_d \end{aligned}$$

De positie en versnelling van het zwaartepunt van het scheenbeen worden:

$$\begin{aligned} \text{Horizontale positie scheenbeen:} & \quad P_{sx}(t) = \sin(\epsilon_d(t)) L_d + \sin(\epsilon_s(t)) D_s \\ \text{Verticale positie scheenbeen:} & \quad P_{sy}(t) = -\cos(\epsilon_d(t)) L_d - \cos(\epsilon_s(t)) D_s \\ \text{Horizontale versnelling scheenbeen:} & \quad A_{sx}(t) = [-\sin(\epsilon_d(t)) \dot{\epsilon}_d(t)^2 + \cos(\epsilon_d(t)) \ddot{\epsilon}_d(t)] L_d \\ & \quad + [-\sin(\epsilon_s(t)) \dot{\epsilon}_s(t)^2 + \cos(\epsilon_s(t)) \ddot{\epsilon}_s(t)] D_s \\ \text{Verticale versnelling scheenbeen:} & \quad A_{sy}(t) = [\cos(\epsilon_d(t)) \dot{\epsilon}_d(t)^2 + \sin(\epsilon_d(t)) \ddot{\epsilon}_d(t)] L_d \\ & \quad + [\cos(\epsilon_s(t)) \dot{\epsilon}_s(t)^2 + \sin(\epsilon_s(t)) \ddot{\epsilon}_s(t)] D_s \end{aligned}$$



Figuur 2: Free-body diagram

De positie en versnelling van het zwaartepunt van de voet worden:

$$\begin{aligned}
 \text{Horizontale positie voet:} \quad P_{vx}(t) &= \sin(\epsilon_d(t))L_d + \sin(\epsilon_s(t))L_s + \sin(\epsilon_v(t))D_v \\
 \text{Verticale positie voet:} \quad P_{vy}(t) &= -\cos(\epsilon_d(t))L_d - \cos(\epsilon_s(t))D_s - \cos(\epsilon_v(t))D_v \\
 \text{Horizontale versnelling voet:} \quad A_{vx}(t) &= [-\sin(\epsilon_d(t))\dot{\epsilon}_d(t)^2 + \cos(\epsilon_d(t))\ddot{\epsilon}_d(t)]L_d \\
 &\quad + [-\sin(\epsilon_s(t))\dot{\epsilon}_s(t)^2 + \cos(\epsilon_s(t))\ddot{\epsilon}_s(t)]L_s \\
 &\quad + [-\sin(\epsilon_v(t))\dot{\epsilon}_v(t)^2 + \cos(\epsilon_v(t))\ddot{\epsilon}_v(t)]D_v \\
 \text{Verticale versnelling voet:} \quad A_{vy}(t) &= [\cos(\epsilon_d(t))\dot{\epsilon}_d(t)^2 + \sin(\epsilon_d(t))\ddot{\epsilon}_d(t)]L_d \\
 &\quad + [\cos(\epsilon_s(t))\dot{\epsilon}_s(t)^2 + \sin(\epsilon_s(t))\ddot{\epsilon}_s(t)]L_s \\
 &\quad + [\cos(\epsilon_v(t))\dot{\epsilon}_v(t)^2 + \sin(\epsilon_v(t))\ddot{\epsilon}_v(t)]D_v
 \end{aligned}$$

2.4 Momenten

Aan de hand van het 'free-body diagram' (zie figuur 2) kunnen de momenten van de enkel, knie en heup bepaald worden. In dit diagram is $PF_x(t)$ de pedaalkracht in horizontale richting en $PF_y(t)$ de pedaalkracht in verticale richting. De andere krachten in het diagram kunnen vanuit deze pedaalkrachten afgeleid worden. Voor de krachten van de enkel is dit $F_{ex}(t) = m_v A_{vx}(t) - PF_x(t)$ en $F_{ey}(t) = m_v(A_{vy}(t) - g) - PF_y(t)$. Met $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ de valversnelling. Voor de krachten bij de knie en heup gelden soortgelijke formules. De pedaalkrachten

worden in Redfield en Hull [5] benaderd aan de hand van een Fourier-serie, die wederom geschat wordt met behulp van verkregen data uit meetapparatuur, de pedaalkracht dynamometer (Hull en Davis [2]). De Fourier coëfficiënten worden niet gegeven. Het enige wat we weten is dat de gemiddelde pedaalkracht (PF_n) gelijk is aan $\bar{P} \frac{T}{L_c 2\pi}$ (afgeleid uit formule 2). Hoe de pedaalkracht zich verder verhoudt, is het tweede gat in het model wat in hoofdstuk 3 zelf wordt opgevuld.

De formules voor enkel, knie en heup momenten worden nu:

$$M_e(t) = I_v \ddot{\epsilon}_v(t) + [F_{ex}(t) \cos(\epsilon_v(t)) + F_{ey}(t) \sin(\epsilon_v(t))] D_v + [PF_x(t) \cos(\epsilon_v(t)) + PF_y(t) \sin(\epsilon_v(t))] (L_v - D_v) \quad (20)$$

$$M_k(t) = M_e(t) + I_v \ddot{\epsilon}_s(t) + [F_{kx}(t) \cos(\epsilon_s(t)) + F_{ky}(t) \sin(\epsilon_s(t))] D_s + [F_{ex}(t) \cos(\epsilon_s(t)) + F_{ey}(t) \sin(\epsilon_s(t))] (L_s - D_s) \quad (21)$$

$$M_h(t) = M_k(t) + I_d \ddot{\epsilon}_d(t) + [F_{hx}(t) \cos(\epsilon_d(t)) + F_{hy}(t) \sin(\epsilon_d(t))] D_d + [F_{kx}(t) \cos(\epsilon_d(t)) + F_{ky}(t) \sin(\epsilon_d(t))] (L_d - D_d) \quad (22)$$

Hierin zijn I_v , I_s en I_d respectievelijk de traagheidsmomenten van de voet, het scheenbeen en het dijbeen. De traagheidsmomenten zijn nodig omdat als iets rond een as draait, het zich als het ware verzet tegen verandering van de draai/hoeksnelheid. Om de hoeksnelheid te veranderen moet daarom een koppel \vec{T} worden uitgeoefend, wat resulteert in $I\ddot{\epsilon}$.

Voor het bepalen van de optimale waarden van cranklengte en trapfrequentie zijn nu alleen nog verschillende invoerwaarden nodig. Voor deze invoerwaarden worden drie verschillende personen gebruikt: een gemiddelde, een kleine en een grote man. De gegevens over deze personen zijn vermeld in tabel 1. Ook zijn de maten van de fiets nodig: de horizontale en verticale afstand van zadel tot trap-as (L_x en L_y). Deze gegevens ontbreken echter in de paper van Hull en Gonzalez [4], waarin de cranklengte en trapfrequentie geoptimaliseerd worden. In de paper van Redfield en Hull [5] worden de lengtes $0.212m$ en $0.693m$ gebruikt voor respectievelijk L_x en L_y .

2.5 Resultaten

Het gemiddelde vermogen (per pedaal) waarvoor de MCF (formule 1) geminimaliseerd wordt is 100 watt. Het totale vermogen 200 watt correspondeert met ongeveer 32km/u (bij hoge kwaliteit banden, professionele racefiets, vlak asfalt, een luchtweerstand op zeeniveau en windstilheid) [6]. Voor de trapfrequentie worden waarden tussen de 60 en 140 omwentelingen per minuut (per stapjes van 10) gebruikt. Voor de cranklengte zijn dit waarden tussen de 140 en 200 mm (per stapjes van 5 mm). Voor elke vaste trapfrequentie wordt de cranklengte gevarieerd totdat de minimale MCF wordt gevonden. De MCF wordt bepaald over één omwenteling van de crank in intervallen van 5 graden ($N = 72$). De resultaten worden gegeven in tabel 2. Het optimum voor de kleine man (162.6 cm) ligt bij een trapfrequentie van 120 omwentelingen per minuut (OPM) en een cranklengte van 140 mm. Voor de gemiddelde man (177.8 cm) is dit 110 OPM en 145 mm en voor de grote man (193.0 cm) 100 OPM en 150 mm.

Gemiddelde man. 72.5 kg, 177.8 cm	dijbeen	scheenbeen	voet*
Lengte (cm)	0.426	0.436	0.161
Afstand tot zwaartepunt (cm)	0.189	0.189	0.069
Traagheidsmoment (kg/m ²)	0.069	0.0422	0.0023
Gewicht (kg)	6.86	3.04	0.98
Kleine man. 58.9 kg, 162.6 cm	dijbeen	scheenbeen	voet*
Lengte (cm)	0.399	0.399	0.149
Afstand tot zwaartepunt (cm)	0.173	0.173	0.064
Traagheidsmoment (kg/m ²)	0.0469	0.0287	0.0016
Gewicht (kg)	5.57	2.47	0.8
Grote man. 90.6 kg, 193.0 cm	dijbeen	scheenbeen	voet*
Lengte (cm)	0.474	0.474	0.174
Afstand tot zwaartepunt (cm)	0.205	0.205	0.075
Traagheidsmoment (kg/m ²)	0.1019	0.0624	0.0033
Gewicht (kg)	8.57	3.81	1.22

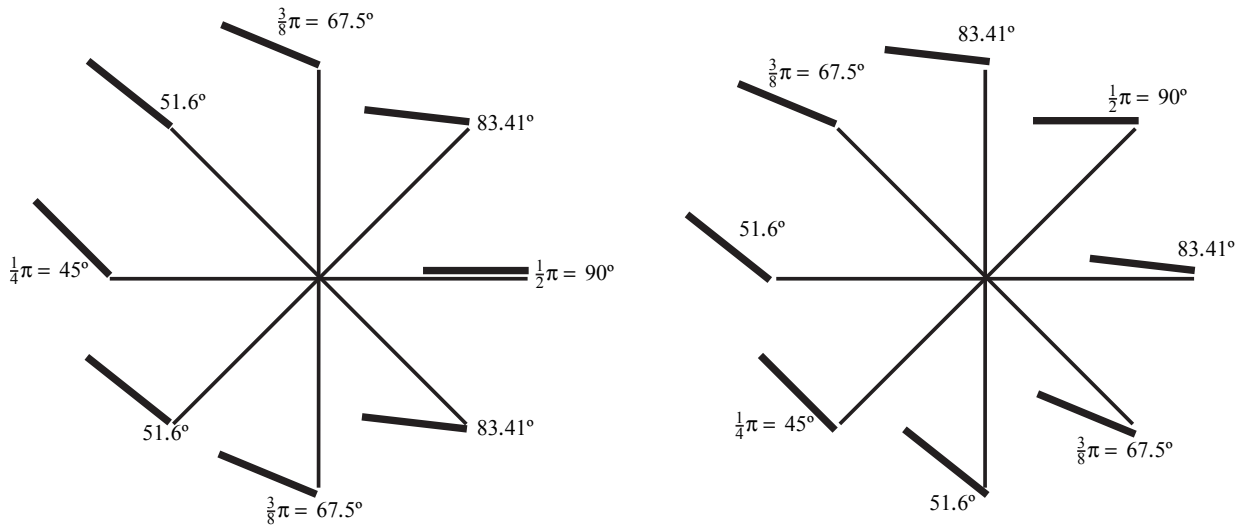
*Voet lengte is de lengte van het verbindingsstuk in het 'five-bar linkage model'

Tabel 1: Waarden van invoergegevens

Omdat een aantal wiskundige aspecten niet voldoende waren uiteengezet was het niet mogelijk om dit model zelf na te rekenen. Belangrijke zaken die ontbraken waren: de functie voor het beschrijven van de voetbeweging en de formules voor het berekenen van de verhouding tussen pedaalkracht en crankomwenteling.

trapfrequentie (OPM)		60	70	80	90	100	110	120	130	140
kleine man	Crank lengte (mm)	200	200	200	200	175	155	140	140	140
	% afwijking	185.7	87.8	34.9	13.2	7.1	2.8	0	8.5	35.8
gemiddelde man	Crank lengte (mm)	200	200	200	185	160	145	140	140	140
	% afwijking	150.3	60.3	17.4	6.7	2.4	0	7.3	39.2	97
grote man	Crank lengte (mm)	200	200	200	170	150	140	140	140	140
	% afwijking	109.7	32.7	6.7	2	0	6.1	52.9	112.9	220.4

Tabel 2: Optimale crank lengte bij verschillende trapfrequenties en percentage afwijking van MCF van overall minimum MCF



Figuur 3: **a)** $\varepsilon_v(t) = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi \sin(\alpha(t))$

b) $\varepsilon_v(t) = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi \sin(\alpha(t) - \frac{1}{4}\pi)$

3 Eigen studie

In dit hoofdstuk worden de gaten die Hull e.a. [3, 4, 5] open lieten, opgevuld en worden eigen resultaten verkregen. De gaten in het model zijn:

1. De voetpositie ten opzichte van de crank.
2. De pedaalkracht loodrecht op de crank.

In sectie 3.1 wordt een model voor de voetpositie ten opzichte van de crank beschreven. Vervolgens wordt in sectie 3.2 een model uitgewerkt voor de pedaalkracht loodrecht op de crank. Nadat het model gecompleteerd is, wordt in sectie 3.3 beschreven hoe het model geïmplementeerd is en worden de resultaten gegeven.

3.1 Voetpositie

In Hull and Jorge [3] wordt, zoals eerder vermeld in sectie 2.3.1, de hoek van de voet $\varepsilon_v(t)$ vast gezet aan de hand van een sinus functie die niet gegeven werd. Daarom is ervoor gekozen om zelf een functie voor $\varepsilon_v(t)$ op te stellen:

$$\varepsilon_v(t) = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi \sin(\alpha(t) + c) \quad (23)$$

In figuur 3a is te zien hoe voor $c = 0$ de voet ten opzichte van de crank zich door deze functie bevindt. Ditzelfde geldt voor figuur 3b maar dan met $c = -\frac{1}{4}\pi$. Deze functies zijn zo bedacht

om de voetstand zo goed mogelijk te benaderen. Als de crank en pedaal naar achteren staan, dan is de voet schuin naar beneden gepositioneerd. Als de crank en pedaal naar voren gericht zijn, dan is de voet ongeveer horizontaal.

$$\epsilon_v(t) = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi \sin(\alpha(t))$$

$$\epsilon_v(t) = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi \sin(\alpha(t) + \frac{1}{4}\pi)$$

Om de hoeksnelheid en hoekversnelling van de voet te bepalen moet vergelijking (23) één- en tweemaal gedifferentieerd worden. Dit geeft:

$$\dot{\epsilon}_v(t) = \frac{1}{8}\pi \cos(\alpha(t) + c)\dot{\alpha}(t) \quad (24)$$

$$\ddot{\epsilon}_v(t) = -\frac{1}{8}\pi \sin(\alpha(t) + c)\dot{\alpha}(t)^2 \quad (25)$$

3.2 Pedaalkracht

De pedaalkracht wordt in Redfield en Hull [5], zoals vermeld in sectie 2.4, benaderd aan de hand van een Fourier serie, waarbij de coëfficiënten ontbreken. Wel weten we dat de gemiddelde pedaalkracht over één omwenteling gelijk moet zijn aan $PF_n = \bar{P} \frac{T}{L_c 2\pi}$ (afgeleid uit formule 2). De pedaalkracht moet ontstaan door de spierinspanning. De pedaalkracht zal het grootste zijn bij een crankhoek ($\alpha(t)$) tussen de 180 en 0 graden, waar de trapper naar beneden gaat. Daarom is ervoor gekozen om een sinusfunctie voor de pedaalkracht te gebruiken, waarbij deze het grootst is wanneer de crank en pedaal naar voren gericht zijn en het kleinste is als de crank en pedaal naar achteren gericht zijn. Hierdoor ontstaat de volgende formule:

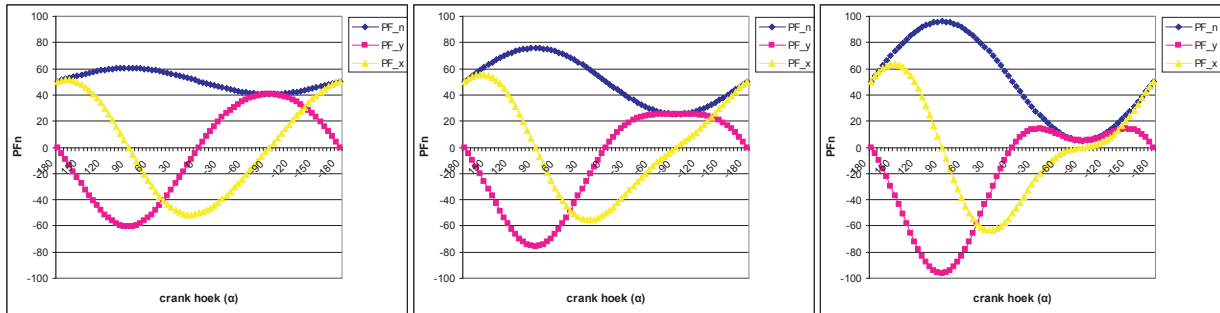
$$PF_n = P\bar{F}_n + cP\bar{F}_n \sin(\alpha(t)) \quad (26)$$

Met de constante c tussen de 0 en 1. De horizontale en verticale componenten van de pedaalkracht worden respectievelijk gegeven door $PF_x = -\cos(\alpha(t))PF_n$ en $PF_y = -\sin(\alpha(t))PF_n$. In figuur 4 is deze functie te zien. Hierin is voor $c = 0.2, 0.5$ en 0.9 gekozen en een gemiddeld vermogen van 100 watt gebruikt. De crankhoek $\alpha(t)$ gaat in figuur 4 van 180 graden (de crank recht naar boven gericht) tot -180 graden, dit omdat de trapbeweging zelf ook zo gaat.

3.3 Implementatie en resultaten

De implementatie van het model is gedaan in het spreadsheet programma Excel. Het grote voordeel hiervan is dat alle formules makkelijk iteratief (eerst de hoeken, dan de hoeksnelheden, etc...) berekend kunnen worden voor elke willekeurige crankhoek ($\alpha(t)$). Om te controleren of de gemodelleerde fietsbeweging goed is gegaan, is deze geplot in stapjes van 30 graden over één enkele omwenteling van de crank. Deze is te zien in appendix A.

Voor de invoer worden dezelfde waarden van de drie personen gebruikt die Hull e.a. ook gebruikten (tabel 1). Voor de gemiddelde man wordt de zadelpositie ingesteld op $0.212m$ en $0.693m$ (L_x



Figuur 4: pedaalkracht (met $c = 0.2, 0.5$ en 0.9 en $\bar{P} = 100$ watt)

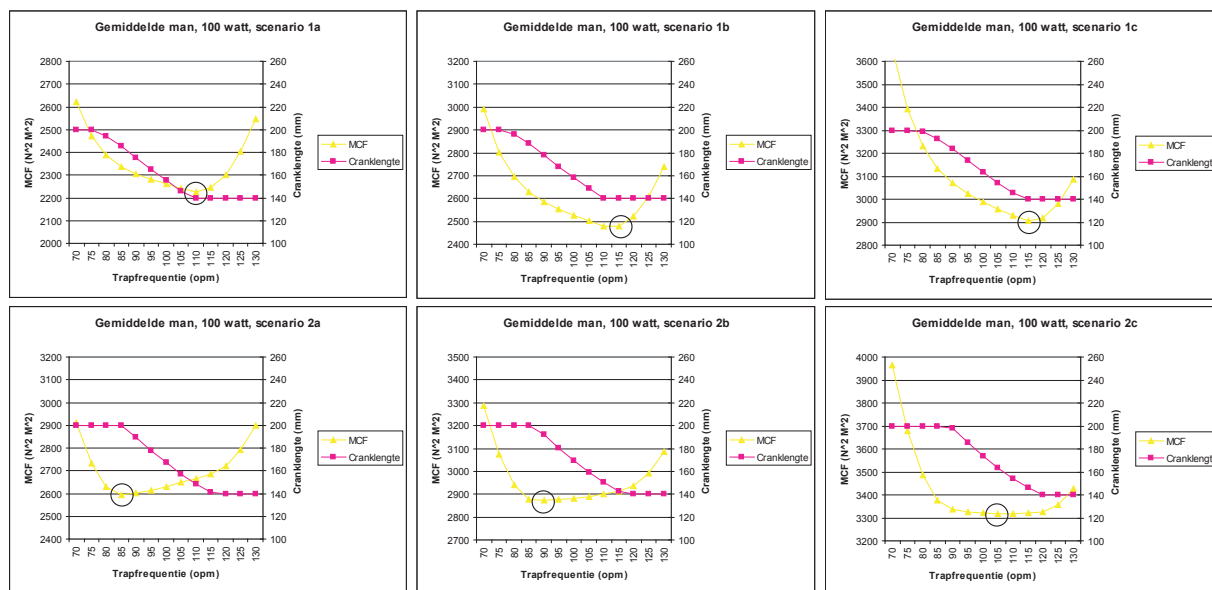
en L_y respectievelijk). Voor de kleine en grote man worden deze waarden lineair aangepast aan hun lichaamslengte. Dit is nodig, omdat de kleine man anders niet bij de trappers kan komen. Dit betekent dat 0.194 en $0.634m$ gebruikt wordt voor de kleine man en 0.230 en $0.752m$ gebruikt wordt voor de grote man.

Per stapjes van 5 omwentelingen per minuut (van 70 tot 130) wordt doormiddel van de Excel-solver de cranklengte bepaald, waarvoor de MCF minimaal is. Hierbij wordt de cranklengte wederom gelimiteerd tussen de 140 en 200 mm. Dit wordt gedaan voor de volgende scenario's:

1. Voetpositie $\varepsilon_v(t) = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi \sin(\alpha(t))$ (figuur 3a)
 - (a) Pedaalkracht $PF_n(t) = \bar{P} + 0.2\bar{P} \sin(\alpha(t))$
 - (b) Pedaalkracht $PF_n(t) = \bar{P} + 0.5\bar{P} \sin(\alpha(t))$
 - (c) Pedaalkracht $PF_n(t) = \bar{P} + 0.9\bar{P} \sin(\alpha(t))$
2. Voetpositie $\varepsilon_v(t) = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi \sin(\alpha(t) - \frac{1}{4}\pi)$ (figuur 3b)
 - (a) Pedaalkracht $PF_n(t) = \bar{P} + 0.2\bar{P} \sin(\alpha(t))$
 - (b) Pedaalkracht $PF_n(t) = \bar{P} + 0.5\bar{P} \sin(\alpha(t))$
 - (c) Pedaalkracht $PF_n(t) = \bar{P} + 0.9\bar{P} \sin(\alpha(t))$

Ten opzichte van scenario 2 kan scenario 1 gezien worden als een wielrenner die meer voorover gebogen op zijn fiets zit. Hierdoor is zijn voet het meest verticaal wanneer de crank in achterstaande positie staat. Deze twee scenario's worden opgedeeld in drie subscenario's, waarbij het verloop van de pedaalkracht steeds verschilt.

In subscenario a is het verschil in pedaalkracht klein tussen de benedenwaartse en bovenwaartse beweging, in subscenario b is dit verschil al groter en in subscenario c het grootst (zie figuur 4 voor de verschillen). Het idee is dat bij subscenario c de rijder de geleverde pedaalkracht vooral in de benedenwaartse beweging kan leggen en daardoor zijn energie kan besparen in de bovenwaartse beweging. De rijder van subscenario b kan dit een beetje en de rijder van subscenario a kan dit nauwelijks, waardoor de benedenwaartse en bovenwaartse pedaalkracht in dit geval niet

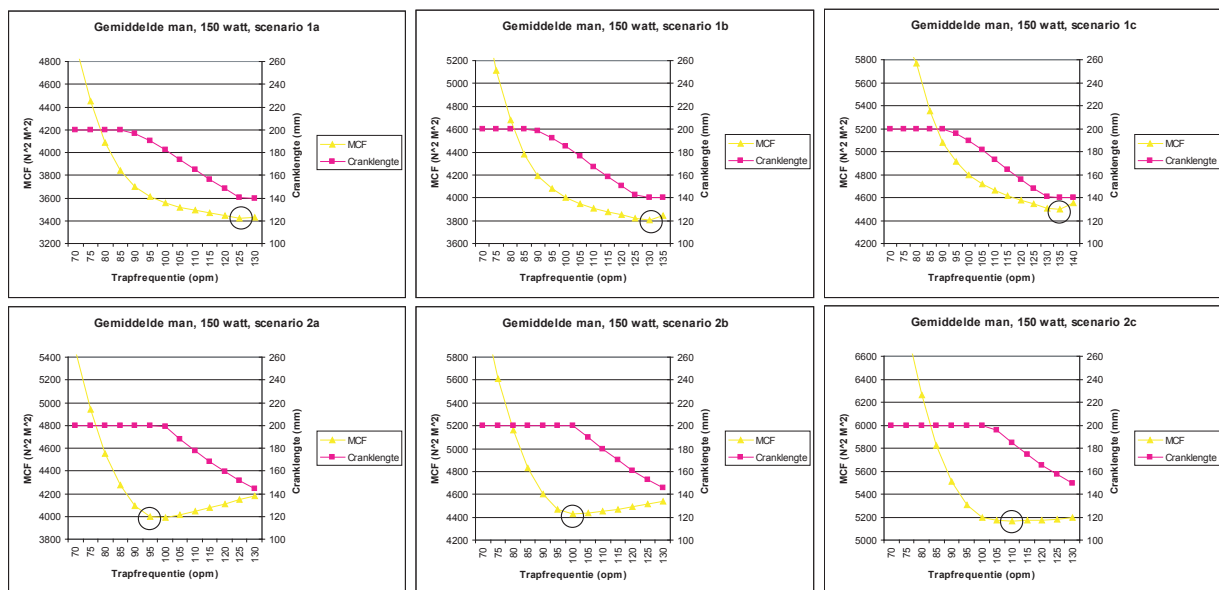


Figuur 5: Optimale cranklengte en MCF als functie van de trapfrequentie voor de verschillende scenario's (gemiddelde man, 100 watt)

zoveel verschillen. Subscenario c is daarom een meer professionele rijder, subscenario a een amateur en subscenario b ergens ertussen in.

De optimalisatie voor de zes verschillende scenario's wordt uitgevoerd voor vier verschillende opstellingen, te weten: de kleine man, de gemiddelde man en de grote man, met ieder een gemiddeld vermogen van 100 watt per been bij de trap-as (de totale 200 watt correspondeert met ongeveer 32km/u [6]). Daarnaast wordt de optimalisatie uitgevoerd voor de gemiddelde man maar nu met een gemiddeld vermogen van 150 watt per been (de totale 300 watt correspondeert met ongeveer 37km/u [6]). Dit laatste om te zien wat er gebeurt als er meer arbeid geleverd moet worden.

In de figuren 5 en 6 zijn de optimale cranklengte en MCF te zien als functie van de trapfrequentie voor alle zes de scenario's. Figuur 5 geldt voor de opstelling met de gemiddelde man en een vermogen van 100 watt per been en figuur 6 geldt voor de opstelling met de gemiddelde man en een vermogen van 150 watt per been. De cirkels in de figuren geven steeds aan waar de MCF minimaal is. Waar aldus de optimale cranklengte en trapfrequentie afgelezen kunnen worden. Wat opvalt is dat voor scenario 2c bij de minimale waarde van de MCF de functie erg vlak loopt. In het geval van een gemiddeld vermogen van 100 watt (figuur 5) is er erg weinig verschil tussen de optimale waarden van de MCF voor trapfrequenties tussen de 90 en 120 OPM. De optimale trapfrequentie is 105 OPM met bijbehorende optimale cranklengte van 164 mm. Echter, eigenlijk maakt het niet heel veel uit indien er een grotere, danwel kleinere trapfrequentie (tussen de 90 en 120 OPM) gekozen wordt. De optimale cranklengte is nagenoeg een lineaire functie van de trapfrequentie voor trapfrequenties tussen de 90 en 120 OPM met bijbehorende helling van -1.9 mm/OPM. In het geval van een gemiddeld vermogen van 150 watt (figuur 6) is er erg weinig verschil tussen de optimale waarden van de MCF voor trapfrequenties tussen de 100 en 130



Figuur 6: Optimale cranklengte en MCF als functie van de trapfrequentie voor de verschillende scenario's (gemiddelde man, 150 watt)

OPM. In dit geval is de optimale cranklengte nagenoeg een lineaire functie met bijbehorende helling van -1.7 mm/OPM .

In tabel 3 zijn deze resultaten en ook de resultaten van de twee andere opstellingen weergegeven. In deze tabel is voor alle scenario's en opstellingen de optimale waarden te zien voor de trapfrequentie en cranklengte en de bijbehorende MCF. Ook wordt de gemiddelde pedaalkracht gegeven, welke afgeleid kan worden uit de trapfrequentie en cranklengte. In tabel 3 is voor alle vier de opstellingen van de zes verschillende scenario's hetzelfde patroon te zien. Scenario 1 (voorover gebogen wielrenner) heeft voor de optimale MCF een hogere trapfrequentie nodig, maar een kleinere cranklengte ten opzichte van scenario 2. De gemiddelde pedaalkracht die geleverd moet worden is voor scenario 1 lager dan voor scenario 2. De voorovergebogen wielrenner hoeft dus minder kracht te geven. De optimale waarde van de MCF is voor scenario 1 steeds kleiner dan scenario 2. Dit betekent dat de meer voorovergebogen wielrenner meer rendement uit zijn fietsbeweging haalt.

Voor respectievelijk subscenario's a, b en c zien we dat de optimale trapfrequentie steeds groter wordt en de optimale cranklengte steeds kleiner. Dus hoe professioneler de rijder, hoe groter de trapfrequentie en hoe kleiner de cranklengte. De te produceren gemiddelde pedaalkracht verschilt niet heel veel, maar de professionelere rijder hoeft iets minder kracht te geven. Wat opvalt is dat de optimale waarde voor de MCF voor subscenario's a, b en c steeds groter wordt. Dit spreekt de verwachting van de professionelere rijder enigszins tegen, omdat er verwacht mag worden dat een professionelere rijder meer rendement behaalt uit zijn fietsbeweging.

Bij het vergelijken van de verschillende personen kan minder goed een vast patroon onderscheiden worden. Hoe groter de man, hoe lager de trapfrequentie en hoe hoger de geleverde gemiddelde pedaalkracht. De cranklengte volgt echter geen zichtbaar vast patroon. Dit is enigszins te

		1				2			
		Trapfrequentie (OPM)	Cranklengte (mm)	Gem. pedaalkracht (N)	MCF (N^2m^2)	Trapfrequentie (OPM)	Cranklengte (mm)	Gem. pedaalkracht (N)	MCF (N^2m^2)
kleine man 100 watt	a	120	140	56.8	1644	90	200	53.1	1889
	b	120	140	56.8	1828	95	194	51.9	2103
	c	125	140	54.6	2158	115	157	52.8	2446
		1				2			
gemiddelde man 100 watt	a	110	140	62.0	2227	85	200	56.2	2594
	b	115	140	59.3	2477	90	192	55.2	2873
	c	115	140	59.3	2904	105	164	55.6	3318
		1				2			
grote man 100 watt	a	90	162	65.6	3314	80	199	59.9	3755
	b	105	140	65.0	3609	85	188	59.9	4133
	c	105	140	64.8	4223	100	158	60.5	4736
		1				2			
gemiddelde man 150 watt	a	125	140	81.6	3425	100	199	71.8	3990
	b	130	140	78.7	3805	100	200	71.6	4426
	c	135	140	75.8	4501	110	184	70.6	5168

Tabel 3: Optimale trapfrequentie en cranklengte en de bijbehorende minimale waarde voor de MCF voor de verschillende scenario's en opstellingen

verklaren doordat voor de drie personen verschillende zadelposities gebruikt worden, waardoor het lastiger wordt de drie verschillende personen één op één te vergelijken.

Bij de vierde opstelling wordt een gemiddeld vermogen van 150 watt per been gebruikt, zodat er bekeken kan worden wat er gebeurt als er meer vermogen/fietsnelheid geleverd moet worden. Voor elk scenario gaat bij deze opstelling de optimale trapfrequentie omhoog in vergelijking met de 100 watt opstelling. De cranklengte blijft nagenoeg gelijk of wordt iets groter. Ook de pedaalkracht wordt groter, dus moet er meer kracht gezet worden. Het resultaat van scenario 1c heeft als optimale trapfrequentie 135 OPM. Omdat deze boven de bovengrens van 130 OPM ligt, is deze oplossing minder nauwkeurig vanwege het feit dat de geleverde dynamische actie boven de 130 OPM significant snel stijgt. Daardoor is het waarschijnlijk dat de oplossing bij 130 OPM beter is. Hierbij is de optimale cranklengte 141 mm en de bijbehorende waarde van de MCF $4508N^2m^2$.

Alle optimalisatieresultaten voor alle verschillende trapfrequenties (70 tot 130 OPM), verschillende scenario's en opstellingen zijn terug te vinden in de tabellen van appendix B.

4 Conclusies

Fietsen is ingewikkelder dan het lijkt. Om het fietsen theoretisch te modelleren, zijn veel aannames en daarbij horende formules nodig. Hull e.a. zijn er in geslaagd om de fietsbeweging te modelleren en de krachtsinspanning van de wielrenner te minimaliseren door de trapfrequentie en cranklengte optimaal te kiezen. Er zitten echter wel een paar zwaktes in de papers van Hull e.a., zoals het niet beschrijven van de functies van de voetpositie en pedaalkracht en zijn bepaalde formules inconsequent, waardoor het valideren van de resultaten onmogelijk is geworden.

In de eigen resultaten zijn grote verschillen te vinden tussen de verschillende uitgevoerde scenario's. Scenario 1 heeft een lagere waarde voor de MCF dan scenario 2. Het is dus aan te bevelen dat rijders meer voorovergebogen fietsen, zodat de voetpositie meer overeenkomt met figuur 3a dan figuur 3b.

Hoe de pedaalkracht zich over een omwenteling van de crank verhoudt is niet helemaal duidelijk. Het idee van de steeds meer professionele rijder wordt tegengesproken, omdat de waarde van de MCF voor subscenario c groter is dan die voor subscenario b, welke weer groter is dan die voor subscenario a. Hierdoor rijst de vraag of de pedaalkracht niet een vast patroon volgt die voor alle typen rijders hetzelfde is, in plaats van door veel te verschillen voor de verschillende typen rijders. Met andere woorden: dat de pedaalkracht vast ligt aan de hand van slechts één enkele functie. Dit vergt echter veel meer kennis over de werking van de beenspieren en over hoe de kinetica op dat gebied in elkaar steekt.

We hebben gezien dat bij grotere mensen een lagere trapfrequentie optimaler is dan bij kleine mensen. Grotere mensen moeten echter meer pedaalkracht leveren ten opzichte van kleine mensen. Dit komt mede doordat grotere mensen zwaarder zijn en daardoor meer kracht nodig hebben om de benen te bewegen (massa is traag).

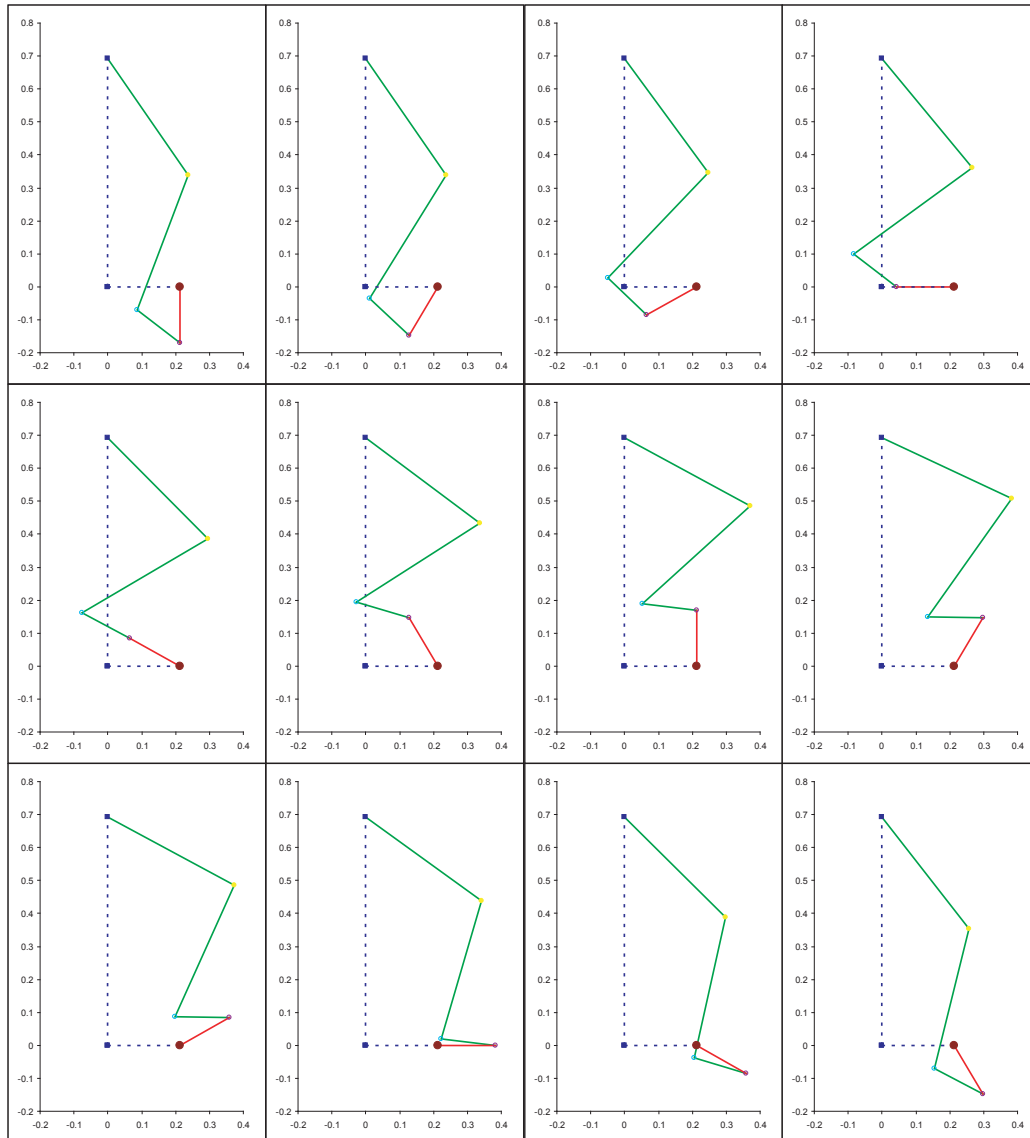
De verschillen tussen de verschillende scenario's zijn erg groot, dit betekent dat de manier van fietsen erg veel invloed heeft op wat de optimale trapfrequenties en cranklengtes zijn. Bijkomende factoren die ook meespelen zijn dat de optimale combinatie voor iedereen verschilt en afhangt van onder andere de samenstelling van de spieren, maar ook andere persoonlijke factoren, zoals comfort. Bij hele hoge trapfrequenties krijgt de wielrenner meer last van wrijving bij de benen en het zitvlak wat kan gaan irriteren. Een wielrenner die hier snel last van heeft kiest dan liever voor een lagere trapfrequentie en een iets grotere cranklengte.

Op een wiskundige manier naar fietsen kijken is niet mogelijk zonder goede aannames te maken. Echter, het maken van de juiste aannames is erg lastig. Hiervoor moet voldoende empirisch onderzoek worden uitgevoerd. Een puur theoretisch wiskundige kijk op fietsen is dus onmogelijk. Om de meest efficiënte fietsbeweging te bepalen zouden dus empirisch en theoretisch wiskundig onderzoek goed op elkaar afgestemd moeten worden.

Referenties

- [1] R.D. CROWNINSFIELD EN R.A. BRAND A physiologically based criterion of muscle force prediction in locomotion. *Journal of Biomechanics* **14**, 793-801, 1981
- [2] M.L. HULL EN R.R. DAVIS Measurement of pedal loading during bicycling - 1. Instrumentation. *Journal of Biomechanics* **14**, 843-855, 1981
- [3] M.L. HULL EN M. JORGE A method for biomechanical analysisi of bicycle pedalling. *Journal of Biomechanics* **10**, 631-644, 1985
- [4] M.L. HULL EN H. GONZALEZ Bivariate optimization of pedalling rate and crank arm length in cycling. *Journal of Biomechanics* **9**, 839-849, 1988
- [5] R. REDFIELD EN M.L. HULL Prediction of pedal forces in bicycling using optimization methods. *Journal of Biomechanics* **7**, 523-540, 1986
- [6] [HTTP://SWISS2.WHOSTING.CH/MDETTING/SPORTS/CYCLING.HTML](http://swiss2.whoosting.ch/mdetting/sports/cycling.html)

A Gemodelleerde fietsbeweging



Figuur 7: De fietsbeweging van een been over een omwenteling van de crank (van links naar rechts en van boven naar beneden).

B Resultaten

scenario	trapfrequentie (OPM)	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130
1a	cranklengte (mm)	200	198	195	191	185	176	167	158	149	141	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	2105	1947	1839	1769	1725	1698	1680	1666	1655	1645	1644	1672	1727
1b	cranklengte (mm)	200	199	196	192	187	179	170	161	152	144	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	2417	2228	2095	2006	1949	1913	1887	1868	1852	1838	1828	1844	1889
1c	cranklengte (mm)	200	200	198	195	190	183	175	166	157	149	141	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	2983	2731	2552	2427	2343	2288	2251	2223	2201	2181	2163	2158	2184
2a	cranklengte (mm)	200	200	200	200	200	191	180	169	160	151	143	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	2285	2108	1988	1916	1889	1894	1902	1913	1926	1940	1955	1974	2014
2b	cranklengte (mm)	200	200	200	200	200	194	182	171	162	153	145	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	2605	2395	2249	2156	2110	2103	2105	2109	2115	2123	2132	2143	2174
2c	cranklengte (mm)	200	200	200	200	200	199	187	176	166	157	149	142	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	3179	2908	2710	2575	2494	2462	2454	2448	2446	2446	2448	2451	2463

Tabel 4: Optimale cranklengte en MCF bij verschillende trapfrequenties, kleine man, 100 watt

scenario	trapfrequentie (OPM)	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130
1a	cranklengte (mm)	200	200	187	174	162	151	141	140	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	3512	3404	3368	3339	3314	3290	3267	3269	3336	3470	3668	3934	4267
1b	cranklengte (mm)	200	200	191	177	165	154	144	140	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	3968	3815	3760	3721	3687	3656	3627	3609	3654	3768	3949	4199	4519
1c	cranklengte (mm)	200	200	198	184	171	160	150	140	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	4771	4534	4429	4376	4331	4292	4256	4223	4224	4299	4446	4665	4958
2a	cranklengte (mm)	200	200	199	185	172	161	152	143	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	3921	3787	3755	3769	3787	3809	3834	3861	3901	3995	4146	4353	4617
2b	cranklengte (mm)	200	200	200	188	175	163	153	145	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	4379	4202	4135	4133	4138	4148	4161	4176	4200	4274	4406	4597	4847
2c	cranklengte (mm)	200	200	200	193	180	168	158	149	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	5183	4925	4790	4756	4744	4738	4736	4738	4743	4778	4876	5036	5258

Tabel 5: Optimale cranklengte en MCF bij verschillende trapfrequenties, grote man, 100 watt

scenario	trapfrequentie (OPM)	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140
1a	cranklengte (mm)	200	200	194	185	175	165	155	146	140	140	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	2621	2472	2389	2338	2306	2282	2262	2243	2227	2244	2302	2402	2545		
1b	cranklengte (mm)	200	200	196	188	178	168	158	149	140	140	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	2990	2802	2694	2628	2584	2552	2525	2501	2478	2477	2521	2608	2738		
1c	cranklengte (mm)	200	200	199	192	184	174	164	154	145	140	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	3655	3392	3231	3134	3070	3024	2988	2957	2928	2904	2918	2979	3086		
2a	cranklengte (mm)	200	200	200	200	190	178	167	157	149	141	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	2909	2733	2630	2594	2602	2615	2630	2648	2667	2687	2722	2793	2900		
2b	cranklengte (mm)	200	200	200	200	192	180	169	159	150	142	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	3289	3075	2941	2879	2873	2876	2882	2890	2901	2913	2935	2993	3088		
2c	cranklengte (mm)	200	200	200	200	198	185	174	164	154	146	140	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	3965	3679	3486	3375	3336	3326	3320	3318	3318	3320	3324	3356	3428		

Tabel 6: Optimale cranklengte en MCF bij verschillende trapfrequenties, gemiddelde man, 100 watt

scenario	trapfrequentie (OPM)	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140
1a	cranklengte (mm)	200	200	200	200	197	190	182	174	165	156	148	140	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	4957	4449	4085	3843	3700	3611	3555	3517	3489	3466	3445	3425	3430		
1b	cranklengte (mm)	200	200	200	200	198	192	185	176	167	159	150	143	140	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	5704	5112	4678	4379	4194	4078	4002	3950	3911	3878	3849	3821	3805	3842	
1c	cranklengte (mm)	200	200	200	200	200	196	189	181	173	164	156	148	141	140	140
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	7086	6333	5766	5356	5082	4912	4798	4721	4664	4618	4579	4542	4508	4501	4555
2a	cranklengte (mm)	200	200	200	200	200	200	199	188	177	168	159	151	144		
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	5464	4939	4550	4273	4094	4002	3990	4016	4045	4077	4111	4147	4184		
2b	cranklengte (mm)	200	200	200	200	200	200	200	190	179	170	161	153	146		
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	6217	5613	5158	4827	4602	4471	4426	4436	4452	4470	4492	4515	4540		
2c	cranklengte (mm)	200	200	200	200	200	200	200	195	184	174	165	157	150		
	MCF ($N^2 \cdot m^2$)	7606	6845	6262	5825	5511	5305	5196	5171	5168	5170	5176	5184	5195		

Tabel 7: Optimale cranklengte en MCF bij verschillende trapfrequenties, gemiddelde man, 150 watt