

# Agent-based modellen van financiële markten

---

Business Mathematics and Informatics Paper

J.W. De Jong

Begeleider: Dr. Ir. E. Winands

Vrije Universiteit

De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam

Februari 2011



## Voorwoord

Deze paper is onderdeel van de studie Bedrijfswiskunde en Informatica. Het idee achter de opdracht is om zelfstandig een onderwerp te bestuderen waarin de drie elementen van de studie naar voren komen: Wiskundige modellering, informatica en een bedrijfskundig c.q. economisch toepassingsgebied. Het wiskunde en informatica aspect is vertegenwoordigd in de vorm van agent-based modellen, een recentelijk ontwikkelde computer intensieve modelleringstechniek. Het toepassingsgebied is de financiële economie. Het was voor mij een interessante ervaring om eens vanuit een ander perspectief dergelijke systemen te beschouwen en ervaring op te doen met het bouwen van een agent-based model. Ik wil Erik Winands graag bedanken voor zijn begeleiding en de mogelijkheid dit onderwerp te bestuderen in de context van deze paper.

J.w. de Jong

Februari 2011

## Samenvatting

Het is bekend uit de statistische literatuur dat financiële markten niet geheel bevredigend beschreven kunnen worden door de klassieke financieel wiskundige modellen. Bovendien geven deze stochastische modellen weinig inzicht in de onderliggende mechanismen die verantwoordelijk zijn voor het geobserveerde macroscopische systeemgedrag. Een alternatieve strategie voor het modelleren van financiële markten, die zijn oorsprong in de natuurwetenschappen vindt, zijn de agent-based modellen. Deze modellen pogen het collectieve marktgedrag te modelleren beginnend vanuit een microscopisch model van het gedrag van de marktparticipanten en hun interacties. Door deze modellen in een computersimulatie te implementeren is het mogelijk structureel te experimenteren met dergelijke systemen. In deze paper hebben we een specifiek agent-based model, het Minority Game model, nader bestudeerd en geïmplementeerd in een computersimulatie. Het doel was met name om de structurele afwijkingen van de klassieke theorie, die in de literatuur bekend staan onder de naam 'Stylized Facts' (deels) te reproduceren met een eenvoudig simulatie model.

# Inhoud

Voorwoord.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Samenvatting .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Hoofdstuk 1: Inleiding.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Hoofdstuk 2: De ‘stylized facts’ .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Hoofdstuk 3: Agent-based Modellen .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3.1 Een nieuwe aanpak van het modelleren van financiële markten ..	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3.1.1 Essentiële elementen van een microscopisch markt model ...	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3.2 Minority Games .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3.2.1 Brian Arthur’s El Farol Bar .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3.2.2 Van het El Farol model naar Minority Games .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Hoofdstuk 4: Het simulatie model in detail .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.1 Standaard Minority Game.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.2 Grand Canonical Minority Game: Het markt model.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Hoofdstuk 5: Resultaten simulaties.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
5.1 Minority Game Simulaties.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
5.2 Markt Model Simulaties (Grand Canonical Minority Game) .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Conclusie.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Literatuur .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Appendices .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
A1 Source Code Simulatie .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Minority Game Source Code.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Market Model (GCMG) Source Code.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Random number generator source code .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>



# Hoofdstuk 1: Inleiding

Voor risico analyses, portefeuille management en het waarderen van derivaten is het van groot belang een accurate beschrijving te hebben van de dynamica van financiële markten. De standaard financiële modellen pogen deze dynamica te modelleren als stochastische processen, in de hoofdzaak met behulp van afgeleiden van de Brownse beweging. Nu is gebleken dat financiële markten niet accuraat beschreven kunnen worden door deze standaard modellen. Afwijkingen van het standaard Gaussische paradigma worden in de literatuur ook wel aangeduid onder de naam 'stylized facts' (Johnson et al 2005). Deze 'stylized facts' zijn een verzameling van empirische observaties die lijken te gelden voor een grote verscheidenheid aan economische tijdsreeksen. In (Johnson et al 2005) wordt de volgende opsomming van deze 'feiten' gegeven:

- Return reeksen zijn leptokurtisch ("zware staarten" van de verdeling)
- Clustering van de volatiliteit
- Snel afname van autocorrelatie van returns
- Langzame afname van autocorrelatie van absolute of kwadratische returns

Voortbouwend op de klassieke modellen worden er steeds geavanceerdere modellen voorgesteld die de echte dynamica van de markten beter beschrijven, echter blijven de modellen enigszins ad hoc, top down en gebaseerd op data uit het verleden. Er lijkt weinig voortschrijdend theoretisch inzicht in de mechanismen die leiden tot de empirische geobserveerde prijs statistieken.

Gegeven de problemen met de standaard modellen en het feit dat economische systemen voorbeelden zijn van uitermate complexe systemen en dus zeer uitdagend zijn om te modelleren voelen wetenschappers buiten het vakgebied van de economie (o.a. natuurkundigen, theoretisch biologen en informatici) zich ook aangetrokken tot het modelleren van dergelijke systemen. Vooral natuurkundigen hebben de afgelopen jaren veel gepubliceerd over economische onderwerpen en dan met name over financiële markten, die enorme hoeveelheden analyseerbare data voortbrengen. Natuurkundigen hebben theoretische methoden ontwikkeld om systemen bestaand uit grote hoeveelheden wisselwerkende deeltjes te beschrijven en met name de laatste decennia ook voor systemen die zich ver uit evenwicht bevinden. Deze methoden lijken goed geschikt voor het modelleren

van financiële markten en economische fenomenen in het algemeen. Deze stroming van natuurwetenschappers schaaft hun werk onder de noemer 'Econophysics' (Farmer 1999). Soms wordt ook de misschien meer passende term "Complexity Economics" (Beinhocker 2007) gebruikt. De kracht van de fysische methode is ook dat de nadruk ligt op mechanistische (i.e. causale) verklaring en sterke theorie vorming gevoed door een voortdurende interactie met empirische data.

In deze paper zal een deelgebied van deze nieuwe stroming nader bestudeerd worden: Agent-based modeling. Agent-based modeling beoogt complexe systemen bestaand uit vele wisselwerkende componenten (agents) op microscopisch niveau, 'bottom-up' te modelleren. De belofte van agent-based modeling is dat er gestructureerd geëxperimenteerd kan worden, maar dan in een virtuele wereld, om zo inzicht te krijgen in de werking van complexe sociale systemen. Het idee is, dat zelfs zeer eenvoudige model systemen complex geaggregeerd gedrag kunnen vertonen, dat ook in de reële-wereld-equivalenten van deze modellen voorkomt. De lange termijn visie van de onderzoekers op dit gebied is dat dergelijke modellen in de toekomst wellicht realistisch genoeg zouden kunnen zijn, zodat deze bijvoorbeeld als input zouden kunnen dienen voor derivaten waardering of evaluatie van macro-economisch beleid. Maar op de korte termijn zouden de modellen al kunnen bijdragen aan een beter fundamenteel begrip van financiële markten en complexe systemen in het algemeen.

In deze paper zullen we specifieke agent-based modellen bestuderen; Minority Games en afgeleiden hiervan. Eerst zullen we de tekortkomingen van de klassieke modellen onderbouwen door data te analyseren afkomstig uit de echte financiële wereld. Vervolgens zullen Minority Games en haar afgeleiden in detail besproken worden en beargumenteren waarom dergelijke modellen markten goed zouden kunnen beschrijven. Vervolgens zullen de resultaten gepresenteerd worden van enkele simulatie studies.



## Hoofdstuk 2: De ‘stylized facts’<sup>1</sup>

Zoals gesteld zijn de ‘stylized facts’ een verzameling van empirische observaties en inferenties die lijken te gelden voor het merendeel van de *dagelijkse* financiële tijdsreeksen, zoals log-returns van aandelen, indexen, wisselkoersen en commodities. Omdat deze observaties gemeengoed zijn geworden in de econometrische literatuur is hun status verheven tot dat van feit. De stylized facts blijven meestal ook gelden voor kortere (intra-dagelijks) en langere tijdsperiodes (wekelijks, maandelijks).

Stel dat de te bestuderen tijdreeks gegeven wordt door  $\{S_t\}_{t=0,1,\dots,n}$  dan worden de log-returns gegeven door:

$$X_t = \ln(S_t/S_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots, n$$

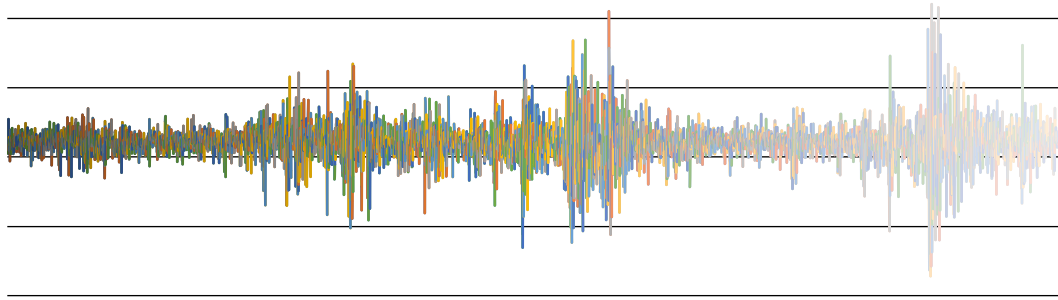
In het vervolg zullen we log-returns gewoon aangeven met returns en niet al te strikt zijn in dit onderscheid.

Ter illustratie zijn voor de periode van 13 oktober 1992 tot en met 4 februari 2011 de returns van de AEX index weergegeven in figuur 1. In figuur 2 zijn de returns van een gesimuleerd Gaussisch proces weergegeven met parameters gegeven door schatting van het gemiddelde en standaard deviatie van de AEX data. Volgens de klassieke theorie zouden returns gemodelleerd kunnen worden door een dergelijk proces. Wat opvalt in de figuren is dat de echte data een veel complexere statistische signatuur hebben. Er zijn meer extreme bewegingen (dikke staarten) in vergelijking met het Gaussische proces en er zijn duidelijk periodes van hoge volatiliteit waar te nemen (volatiliteitsclustering). Figuur 3 geeft een andere kijk op dit fenomeen door middel van de correlogrammen, welke een grafische weergave zijn van de schattingen van de seriële correlaties in de data. Voor de returns is er voor beide data sets geen sterke reden om significante autocorrelatie te veronderstellen (hoewel voor de AEX data voor een aantal lags de autocorrelatie wel net boven het significantie niveau uitkomen), maar voor de AEX data moet de hypothese dat de kwadratische return ongecorrleerd zijn verworpen worden.

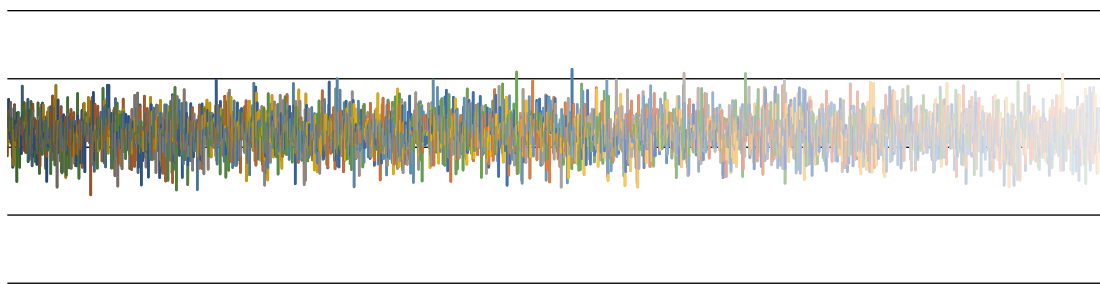
We hebben hier slechts een willekeurige tijdreeks geanalyseerd, maar deze observaties zijn inmiddels talloze keren bevestigd voor een grote variëteit aan data.

---

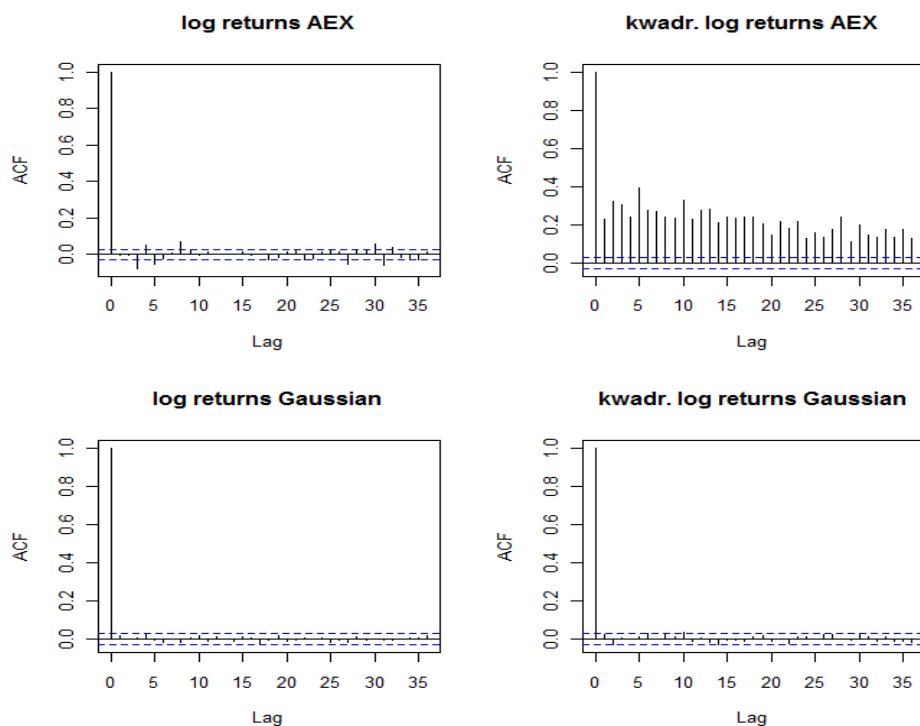
<sup>1</sup> McNeil et al. 2005



Figuur 1 log returns AEX 13 okt. 1992 - 4 feb. 2011



Figuur 2 Gesimuleerd Gaussisch proces met parameters bepaald door schatting van de AEX data (gemiddelde en standaard deviatie)



Figuur 3 correlogrammen van de log-returns (links) en de kwadratische log-returns voor de twee datasets uit figuur 1 en 2. De onderbroken strepen geven de 95% betrouwbaarheidsintervallen weer van een proces van i.i.d. random variabelen met eindige variantie.

## Hoofdstuk 3: Agent-based Modellen

### 3.1 Een nieuwe aanpak van het modelleren van financiële markten<sup>2</sup>

Zoals eerder gesteld is het probleem van de traditionele aanpak (stochastische modellen) dat de modellen maar beperkte zin in staat zijn de markt bewegingen te beschrijven. Nu is het natuurlijk zo dat de financieel wiskundigen en econometristen steeds geavanceerde modellen voorstellen. Voorbeelden hiervan zijn bijvoorbeeld de zogenaamde GARCH modellen uit de econometrie. Deze modellen zijn vrij goed in staat de karakteristieken van de geobserveerde tijdsreeksen de modelleren. Echter blijft men met deze strategie in zekere zin achter de feiten aan lopen. Hoe kan er bijvoorbeeld het beste model voor een gegeven markt gekozen worden? Of hoe kan er op systematische wijze een stochastisch 'super' model gecreëerd worden? Met een gedetailleerde empirische analyse van de verschillende kandidaat modellen zouden deze vergeleken kunnen worden met de geobserveerde 'stylized facts', maar dit zou noodzakelijkerwijs gebaseerd zijn op data uit het verleden voor een specifieke markt. Dan komt automatisch de vraag op: Zal de geschiedenis zich herhalen voor deze markt? Een gerelateerd probleem bestaat als men geïnteresseerd is in het begrijpen

<sup>2</sup> Johnson et al. 2003

van de ontwikkeling van een nieuwe markt. Een goed voorbeeld hiervan is de introductie van de Euro. Wellicht was het nuttig geweest om vooraf een idee te hebben gehad, hoe de wisselkoersen zich zouden kunnen ontwikkelen tegen andere belangrijke valuta's. Een andere situatie zou kunnen zijn dat een toezichthouder een idee wil krijgen wat de effecten zullen zijn van veranderingen van regelgeving op de markten. In deze gevallen zouden mogelijke scenario's en algemeen kwalitatief begrip van de mechanismen die leiden tot bijvoorbeeld volatiliteit van nut kunnen zijn om tot betere beslissingen te komen. De vragen hierboven zijn van groot praktisch belang, maar zullen nooit door een (puur) stochastisch model beantwoord kunnen worden. En ook al zou een acceptabel stochastisch 'super' model geconstrueerd worden, is er dan werkelijk sprake van een *fundamenteel begrip* van hoe financiële markten werken? Geïnspireerd door de natuurwetenschappelijke aanpak zou er gesteld kunnen worden dat er gezocht moet worden naar een microscopische begrip van markten. Hier kan een parallel getrokken worden met de thermodynamica, het vakgebied dat de macroscopische eigenschappen van gassen e.d. bestudeert. Een fundamenteel begrip van dit vakgebied liet op zich wachten tot de ontwikkeling van de statistische mechanica, waarin macroscopische systemen, zoals gassen, vloeistoffen en vaste stoffen, vanuit een microscopisch perspectief beschreven worden. De ambitie van de onderzoekers die financiële markten vanuit dit perspectief bestuderen is om de markten te modelleren vanuit een idee hoe de markt actoren (agents) zich gedragen (eventueel gebaseerd op experimentele gegevens<sup>3</sup>) om vervolgens de geobserveerde macroscopische prijs dynamica te begrijpen. Noodzakelijkerwijs zullen de microscopische details van dergelijke modellen (initieel) een zeer grote abstractie zijn van echte markten, maar toch al inzicht kunnen geven in een aantal belangrijke karakteristieken.

### **3.1.1 Essentiële elementen van een microscopisch markt model**

Als men vanuit een microscopisch perspectief de fluctuaties van financiële markten beschouwd dan is het duidelijk dat hun oorsprong ligt in de competitie, interactie, feedback, frustratie en adaptatie van de vele spelers in de markt. Dit geldt met name als de nadruk op speculatief handelen wordt gelegd. In zekere zin kan men het systeem dus beschouwen als een 'multi-agent' spel, waarin de uitkomst (de geobserveerde prijs) bepaald wordt door de geaggregeerde acties van de agents zelf. Hoofdzakelijk hebben de agents de volgende mogelijkheden tot hun beschikking: 'kopen', 'verkopen' en 'doe niets'. Vanuit dit perspectief van een multi-agent spel stellen Johnson et al (2003), dat een markt model de volgende eigenschappen hebben wil het de potentie hebben (speculatief) handelen in echte markten te kunnen karakteriseren:

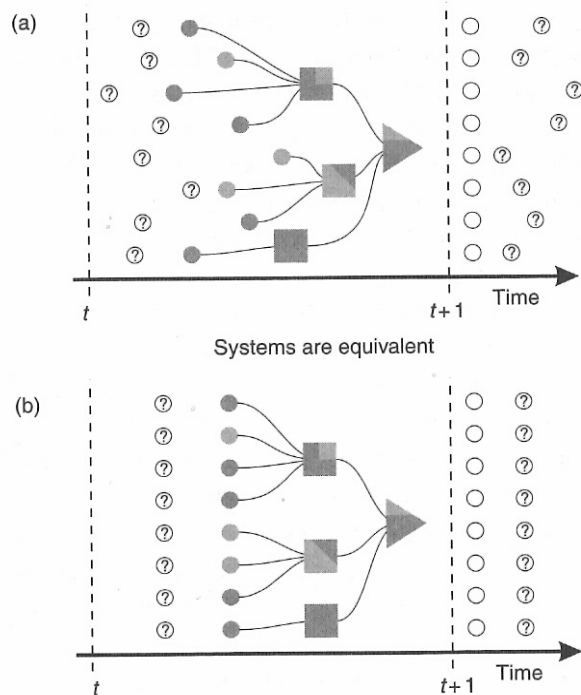
---

<sup>3</sup> Zie bijvoorbeeld 'Experimental Economics' op Wikipedia:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Experimental\\_economics](http://en.wikipedia.org/wiki/Experimental_economics)

*Beperkte, primair globale informatie:* In een 2-speler spel, zoals deze traditioneel in klassieke spel theorie bestudeerd worden, is het over het algemeen mogelijk om te bepalen wat de beslissing was van de tegenspeler. In een spel met drie of meer agents, waarin slechts globale informatie beschikbaar is, zal het in het algemeen niet meer mogelijk zijn om te bepalen wat de actie van elk van de andere agents was. Het is dus in een eerste benadering redelijk dat alle agents hun beslissingen baseren op dezelfde algemeen beschikbare informatie  $\mu[t]$  op tijdstip  $t$ .

*Veel deelnemers (agents):* In een spel met  $N = 2$  agents is het in principe realistisch om te veronderstellen dat de agents in staat zijn een optimale strategie deductief te bepalen, rekening houdend met de strategische interactie met de tegenspeler. Voor eenvoudig  $N$ -agent spel, met  $s = 2$  strategieën voor elke agent, zijn er  $2^N$  mogelijke combinaties van strategieën. Met toenemende  $N$  is het al snel redelijk om te veronderstellen dat de complexiteit van het vinden van een optimale strategie zodanig is dat deze redelijkerwijs niet gevonden kan worden door een mens (of zelfs computer). Het is dus onmogelijk om voor agent  $i$  op een gegeven tijdstip  $t$  zijn optimale opdracht  $a_i[t]$  te bepalen, omdat voor hem de andere opdrachten  $a_j[t]$  van alle andere agents met  $j \neq i$  voor hem onbekend zijn. De agents zullen dus hun opdrachten geheim willen houden voor de andere agents om uitbuiting te voorkomen. Het resultaat is dan dat de agents zich onafhankelijk van elkaar gedragen en tot hun eigen, inductieve conclusies moeten komen over wat hun 'beste' opdracht is. Het aantal agents  $N$  zal typisch van orde  $10^2$  tot  $10^3$  zijn. Deze agents representeren de markt partijen met een significant effect op de markt, zoals grote banken, pensioen fondsen, institutionele beleggers en hedge fondsen.

*Dynamisch:* Markten zijn inherent dynamische systemen, waarin timing van essentieel belang is. *Wanneer* een opdracht uitgevoerd wordt kan het verschil uitmaken tussen winst en verlies. We kunnen echter wel de vereenvoudigende aanname maken dat alle opdrachten in een bepaald tijdsinterval op het zelfde tijdstip gedaan worden. Zo wordt het systeem dus in discrete tijd geplaatst, maar omdat de 'market maker' slechts met eindige snelheid opdrachten kan verwerken en dus opdrachten in 'batches' zal uitvoeren is dit *geen* benadering. De figuur hieronder geeft dit schematisch weer.



**Figuur 4** Equivalentie continue tijd en discrete tijd systemen. De twee systemen in de figuur zijn equivalent, omdat de 'market maker' de tijdslimiterende stap in het proces is. De 'market maker' verzamelt alle binnengekomen opdrachten tussen  $t$  en  $t+1$ , past de prijs aan en voert de opdrachten uit op tijdstip  $t+1$ <sup>4</sup>.

In de modellen die we hier beschouwen wordt wel de aanname gemaakt dat alle opdrachten zogenaamde *market orders* zijn. Dit is een opdracht om het verhandelde aandeel bijvoorbeeld te kopen voor de huidige markt prijs (best beschikbare prijs). Dit heeft als consequentie dat er een eenduidige opeenvolging van gebeurtenissen is in het systeem: *beslissing* (van de agents) – *opdracht* – *prijs aanpassing* – *opdracht uitvoering*. Deze aanname is redelijk voor korte tijdsschalen en speculatief handelen, waarin de agents een mening vormen over de richting van de prijs beweging en hun opdracht onmiddellijk uitgevoerd willen zien worden om te profiteren van de prijsbeweging.

*Adaptief:* Een eenvoudige manier om te inductief redenerende agents te modelleren is om aan elke agent  $S$  strategieën toe te wijzen uit het totaal van mogelijke strategieën. Deze strategieën  $s \in S$  beelden de globale informatie  $\mu[t]$  af op een beslissing of actie  $\alpha_s^{\mu[t]}$ . Met deze verzameling van  $S$  strategieën kan elke agent inductief bepalen wat de beste beslissing op tijdstip  $t$  zal zijn door de historische prestaties van zijn beschikbare strategieën te vergelijken. De agent heeft nu ook de mogelijkheid om zijn gedrag aan te passen aan de dan geldende marktomstandigheden (die worden gerepresenteerd door  $\mu[t]$ ). Een strategie die op een bepaald moment in het verleden goed werkte, kan mogelijk op een ander moment

niet meer goed werken. Door aan de agents verschillende strategieën ter beschikken te stellen wordt de populatie ook heterogeen; niet alle agents zijn hetzelfde en er is geen 'representatieve' agent.

*Feedback:* De globale informatie  $\mu[t]$  kan in principe alle relevante informatie over verhandelde instrument, zoals prijzen en volumes van de laatste  $m$  tijdeenheden bevatten maar ook informatie extern aan de markt zelf. De interne markt variabelen worden echter door het systeem zelf als output gegenereerd en worden dus vervolgens weer als input gebruikt. Er is dus sprake van terugkoppeling of feedback. Als de aanname gemaakt wordt dat alle agents 'technisch' handelen, dus alleen op basis van informatie gegenereerd door het systeem zelf, dan is de terugkoppeling perfect, d.w.z. er zijn geen externe factoren die de opdrachten van de agents beïnvloeden. Voor zeer liquide, speculatieve markten lijkt dit een realistische aanname, zeker op korte tijdsschalen.

*Competitie:* Er moet een mechanisme zijn dat bepaald hoe de agents 'winnen' of 'verliezen'. Een eenvoudig mechanisme kan gebaseerd zijn op de observatie dat over het algemeen een overschot van kopers/verkopers de prijs omhoog/omlaag drijft. Op het moment van handelen is het dus zaak voor de agents om in de minderheid te zijn.

Een markt model dat voldoet aan deze criteria is ontstaan uit de 'Minority Game' van Challet. We zullen dit model hieronder in detail beschrijven, na een schets van de historie en achtergrond van het model.

### 3.2 Minority Games

Minority Games zijn geïntroduceerd en voor het eerst bestudeerd door Challet and Zhang in 1997. Het doel van het model was om beginnend vanuit een zo simpel mogelijk model de essenties van marktinteracties te vatten en deze in detail te begrijpen, om daarna extra complexiteit toe te voegen om naar een realistisch model van financiële markten toe te werken. Hierin onderscheid het model zich ook van eerdere pogingen van natuurkundigen om financiële markten te modelleren als multi-agent systemen. Deze studies lieten zien hoe modellen met wisselwerkende agents - gedefinieerd als computationele eenheden met een zekere autonomie, die markt participanten in de modellen moeten representeren - realistische prijsstatistieken konden genereren, met crashes, geclusterde volatiliteit, langdurige bubbels en depressies. De grote tekortkoming van deze modellen was dat de relevante kenmerken van de interacties niet goed te ontrafelen waren door de grote hoeveelheid aan parameters die deze modellen rijk waren. Dit maakte een systematisch begrip van de fenomenen die de modellen probeerden te weerspiegelen praktisch onmogelijk. Minority Games proberen dit probleem te omzeilen door middel van een focus op

alleen de echt essentiële karakteristieken. In deze zin kan het model vergeleken worden met de zogenaamde Ising modellen uit de natuurkunde, waarmee magnetische materialen worden gemodelleerd. Deze modellen zijn ook tot een maximum geabstraheerd, maar geven toch inzicht in fascinerende en complexe fenomenen als faseovergangen.

### 3.2.1 Brian Arthur's El Farol Bar

Minority Games vinden hun oorsprong in het 'El Farol Bar' probleem, oorspronkelijk bedacht door de econoom Brian Arthur. Arthur is een econoom verbonden aan het Santa Fe instituut<sup>5</sup> in New Mexico. Dit is een instituut dat zichzelf ten doel heeft gesteld complexe adaptieve systemen<sup>6</sup>, zoals de economie, te begrijpen vanuit een multidisciplinair perspectief. Arthur is dan ook een econoom die zich al jaren buiten de gebaande paden van de neoklassieke economie begeeft. Het 'Bar' probleem is door Arthur bedacht als een reactie op zijn frustratie over het rationaliteitsaxioma van de klassieke economie. Dit axioma veronderstelt dat de actoren (agents) in de economie een bijna oneindige computationele capaciteit hebben en dus zeer complexe berekeningen uitvoeren alvorens hun beslissingen te nemen over triviale zaken zoals het kopen van een pak melk. Het is dus de veronderstelling dat er altijd deductief een optimale beslissing te bepalen is, gegeven alle beschikbare informatie. Arthur wilde een model construeren waarin de agents beperkt rationeel waren (bounded rationality). Hij kwam op het volgende idee door zijn bezoeken aan El Farol, een Ierse bar in Santa Fe waar op donderdag avonden Ierse muziek te beluisteren was: El Farol is een niet al te grote bar, dus om een plezierige avond te hebben is het noodzakelijk dat er niet meer dan 60 mensen aanwezig zijn. De potentiële bezoekers besluiten om alleen naar de bar te gaan als ze verwachten dat er minder dan 60 mensen aanwezig zullen zijn. Er is geen mogelijkheid tot communicatie tussen de bezoekers om zo acties te coördineren. De enige informatie die de bezoekers ter beschikking hebben zijn de bezoekersaantallen van de afgelopen  $m$  donderdagen. Hoe kunnen de bezoekers tot een beslissing komen om wel of niet naar de bar te gaan? Het model veronderstelt verder dat de bezoekers beperkt zijn tot 'inductief' redeneren: Ze hebben een beperkt aantal strategieën tot hun beschikking – een soort vuistregels of schemata en in plaats van de waarde van de strategieën a priori te bepalen, evalueren de bezoekers de strategieën op basis van hun succes als de strategie gevolgd zou zijn. Eventueel past de bezoeker op basis van zijn bevindingen zijn gedrag aan. Door uit te gaan van deze simpele strategieën wordt de complexiteit van het beslisprobleem enorm gereduceerd, met als prijs hiervoor wellicht een gereduceerde efficiëntie. 'Inductief'

---

<sup>5</sup> <http://www.santafe.edu/>

<sup>6</sup> Een **complex adaptief systeem** (CAS) is een complex systeem waarvan de onderling verbonden componenten de mogelijkheid hebben zich aan te passen en te "leren" van eerdere ervaringen. De term is bedacht aan het Santa Fe Instituut door John Henry Holland, Murray Gell-Mann en nog enkele anderen. De studie van CAS richt zich in de eerste plaats op hun complexe, emergente en macroscopische eigenschappen ([http://nl.wikipedia.org/wiki/Complex\\_adaptief\\_systeem](http://nl.wikipedia.org/wiki/Complex_adaptief_systeem)).



redeneren in tegenstelling tot 'deductief' redeneren zoals opgelegd wordt aan economische actoren in de standaard modellen was Arthur's primaire focus. Maar ook belangrijk is dat er geen a priori (deterministische) beste strategie kan zijn in dergelijke situaties. Als dit namelijk wel zo zou zijn, dan zou iedereen deze gebruiken met als gevolg dat de bar overvol zou zijn of helemaal leeg; iedereen gaat naar de bar, of iedereen blijft thuis. Als de agents dezelfde verwachtingen hebben over het aantal personen dat naar de bar zal gaan (en hiernaar handelen), dan zullen deze verwachtingen verkeerd blijken. In deze situatie moet er dus een heterogene populatie van agents zijn, met verschillende verwachtingen en strategieën om tot een efficiënte oplossing te komen. Ondanks de simpele veronderstellingen en de beperkte mogelijkheden van de agents bleek het aantal bezoekers in het model toch naar de optimale waarde te convergeren. Arthur's doel was om aan te tonen dat inductief redeneren behoorlijk effectief kan zijn en daar was hij in geslaagd. Challet et al. zagen echter meer mogelijkheden in het model en zij pasten het model aan om het in meer detail te kunnen analyseren.

### 3.2.2 Van het El Farol model naar Minority Games

Het Minority Game model is een vereenvoudiging het originele model van Arthur. Een strategie in het El Farol model is een regel welke het aantal bezoekers voor de volgende week voorspelt, gegeven de voorgaande bezoekers aantallen. Elke 'agent' heeft meerdere voorspellers en volgt de regel met beste historische prestaties (ga naar de bar als de voorspelling kleiner dan 60 is en blijf anders thuis). Stel nu dat de agents hun beslissingen baseren op de laatste  $m$  bezoekers aantallen. Met  $N$  agents kan het bezoekers aantal  $N + 1$  waarden aannemen. Dit geeft dan  $(N + 1)^m$  mogelijke combinaties van informatie over het verleden. Als strategieën het komende bezoekersaantal voorspellen, gegeven de informatie van  $m$  voorgaande aantallen dan zijn er dus  $(N + 1)^{(N+1)^m}$  mogelijke voorspel strategieën. Dit geeft een enorme zoekruimte, wat niet wenselijk is. Tevens is de sterke afhankelijkheid van de complexiteit van de strategieën van  $N$  niet ideaal. Intuïtief zou het gedrag van een speler niet erg moeten verschillen in een situatie met  $N = 100$  of  $N = 105$  bijvoorbeeld. Sterker nog, als het aantal medespelers toeneemt is het redelijk om te veronderstellen dat mensen spelen alsof ze tegen een groep, een enkele megaspeler, spelen in plaats van  $N - 1$  intelligente tegenspelers. Deze groep zal zich niet gedragen als een speltheoretische speler, maar als een entiteit met een eigen 'wil' en niet per se optimaliserend gedrag. De eerste vereenvoudiging wordt verkregen door het feit dat de agents alleen geïnteresseerd zijn in het wel of niet gaan naar de bar. Het precieze bezoekers aantal hoeft niet voorspeld te worden, alleen of het de moeite waard is om te gaan of niet. Dit geeft  $2^{(N+1)^m}$  strategieën. Een verdere drastische verkleining van de strategie ruimte kan bewerkstelligd worden door de acties/voorspellingen niet te baseren op de exacte bezoekers aantallen, maar op een binaire informatie, zodat de beschikbare informatie slechts bestaat uit 'overvol'/'niet overvol'. Challet

et al (2004) onderbouwen deze reductie met het argument dat het wenselijk is om een strategieruimte te hebben met strategieën die een zekere 'continuïteit' bezitten. Continuïteit betekent in deze context dat een kleine verandering in de informatie, een kleine (of zelden een) verandering in de voorgeschreven actie tot gevolg zou moeten hebben. Als de voorgeschreven acties op een willekeurige manier van de voorgaande aantallen bezoekers kunnen afhangen, dan kunnen bijvoorbeeld de volgende strategieën naast elkaar bestaan: 70,72,80 => 'blijf thuis' en 71, 72, 80 => 'ga naar de bar'. Zo is in te zien dat de strategieruimte zeer 'onregelmatig' is. Door nu de strategieën alleen te laten afhangen van de binaire informatie worden enorm veel 'onzinnige' strategieën uitgesloten en wordt het aantal strategieën teruggebracht tot  $2^{2^m}$ . Zo is ook de onwenselijke afhankelijkheid van  $N$  verdwenen. Gezien het feit dat fluctuaties om het optimale bezoekers aantal voornamelijk interessant zijn kan het probleem nog symmetrisch gemaakt worden door aantal beschikbare plaatsen op  $N/2$  te stellen. Het is dus aan de spelers om in de minderheid te zijn (thuis blijven als er  $> N/2$  naar de bar gaan en naar de bar gaan als er minder dan  $N/2$  gaan). Dit is hoe het Minority Game model in zijn originele vorm was gedefinieerd door Challet et al. (Challet en Zhang 1997). In het volgende hoofdstuk zal dit model en extensies hiervan in detail beschreven worden.

# Hoofdstuk 4: Het simulatie model in detail

## 4.1 Standaard Minority Game<sup>7</sup>

Het standard minority game model is dus feitelijk een binaire versie van het 'El Farol Bar' probleem van Arthur. Er zijn  $N$  spelers en aan elk van deze spelers worden  $S$  strategieën uit het totaal van mogelijke strategieën toegewezen. Een strategie  $s \in S$  is een verzameling regels die voor elke mogelijk historie  $\mu[t]$  een actie  $a_s^{\mu[t]} \in \{-1,1\}$  specificeert. Hierbij representeert  $-1$  de actie 'blijf thuis' en  $1$  de actie 'ga naar de bar'. Deze acties corresponderen dus ook met de voorspellingen of de bar te vol is of niet. In tabel 1 is een voorbeeld van een strategie weergegeven.

Tabel 1 voorbeeld van strategie voor  $m = 3$

Signaal	Actie
000	1
001	-1
010	-1
011	1
100	1
101	-1
110	1
111	-1

Een historie  $\mu[t]$  is een rijtje van lengte  $m$  met elementen  $0,1$  de toestand in de bar (overvol of niet) representeren tijdens de  $m$  laatste tijdstappen. Totaal zijn er dus  $P = 2^m$  mogelijke histories mogelijk en dus  $2^P$  mogelijke strategieën. Initieel worden aan alle  $N$  agents willekeurig  $S$  strategieën toegewezen. In elke tijdstap kiest elke agent zijn beste strategie, dat wil zeggen de strategie die het historisch het beste heeft gedaan. Van alle strategieën wordt dus een score bijgehouden, ook al wordt deze niet feitelijk gebruikt door een speler. Een strategie krijgt een punt als deze de goede actie voorschreef. De goede actie in deze context is de keuze van de 'minderheids' kant; Blijf thuis als de minderheid thuis blijft en ga naar de bar als de minderheid naar de bar gaat. Hieronder is een globaal de structuur van de computersimulatie weergegeven in 'pseudocode' :

<sup>7</sup> Challet et al. 2005

```

//INITIALISATIE
  for i=1 to N
    for s=1 to S
      for  $\mu=1$  to P
        a[i][j][ $\mu$ ] = assign -1,1 randomly
      end for
      points[i][s] = 0
    end for
    bestStrategy[i] = 0
  end for
//VOER SIMULATIE T TIJDSTAPPEN UIT
for i=1 to T
//KEUZE AGENTS: HIER BEPALEN DE AGENT HUN TE SPELEN STRATEGIE DOOR
//DE UIT HUN STRATEGIEËN DEGENE MET DE HOOGSTE SCORE TE SELECTEREN.
  for i=1 to N
    for s=1 to S
      if (points[i][s] > points[i][bestStrategy[i]])
        bestStrategy[i] = s
      end for
    end for
//MARKT INTERACTIE: HIER WORDT OP BASIS VAN DE GEKOZEN STRATEGIEËN
EN DE GLOBALE INFORMATIE  $\mu$  DE ACTIES BEPAALD EN DE RESULTERENDE
WINNENDE KANT.
  N1=0
  for i=1 to N
    N1 = N1 + a[i][bestStrategy[i]][ $\mu$  - 1]
  end for
  if (N1 > N/2)
    winSide = 0
  else
    winSide = 1
  end if
//LEREN: HIER UPDATEN ALLE SPELERS DE SCORES VOOR DE HUIDIGE
INFORMATIE  $\mu$  VAN AL HUN STRATEGIEËN GEGEVEN HET SUCCES VAN DE
STRATEGIE IN DEZE TIJDSTAP.
  for i=1 to N
    for s=1 to S
      if (a[i][s][ $\mu$ ] = winSide)
        points[i][s] = points[i][s] + 1
      end if
    end for
  end for
//INFORMATIE UPDATE
   $\mu$  = mod(2* $\mu$  + winSide, 2m)
end for

```

In de pseudocode hebben we de volgende elementen:

- Er zijn  $N$  spelers met elk  $S$  strategieën

- $bestStrategy[i]$ : de strategie van speler  $i$  met de hoogste (virtuele) score,  $i = 1, \dots, N$  op een bepaald tijdstip.
- $a[i][bestStrategy[i]][\mu]$ : de actie van speler  $i$  gespecificeerd door zijn beste strategie en de historie  $\mu$
- $N1$ : Het aantal agents dat 1 ('ga naar de bar') kiest
- $points[i][s]$ : De score van strategie  $s$  voor speler  $i$ . Verschillende beloningsstructuren kunnen hier gehanteerd worden. De meest elementaire beloningstructuur is de toekenning van een (virtueel) punt voor een correcte voorspelling. De punten zijn virtueel in de zin dat ook de niet door de speler gebruikte strategieën op dezelfde wijze beloond worden.
- $winSide$ : De 'winnende' kant
- $\mu$ : De geschiedenis gecodeerd als integer. De eerste  $m$  bits van de binaire representatie van  $\mu$  zijn gelijk aan de laatste  $m$  waarden van  $winSide$ .

## 4.2 Grand Canonical Minority Game: Het markt model

Minority Games modelleren een systeem waarin agents in competitie zijn met elkaar voor een schaars goed: een zitplaats in een bar. Elke agent gebruikt alleen de globale informatie afgeleid van de voorgaande bezoekersaantallen om uit te maken wel of niet naar de bar te gaan. Dit model bevat dus al de cruciale componenten van competitie, adaptiviteit, feedback, inductief redenerende agents etc. De vraag is nu hoe dit model te 'vertalen' naar en eventueel uit te bereiden tot een redelijk model van een financiële markt. Het doel hier is om een minimaal markt model te ontwikkelen waarmee de 'stylized facts' gereproduceerd kunnen worden en markt fluctuaties bestudeerd kunnen worden. Johnson et al.<sup>8</sup> stellen het hieronder beschreven model voor, ook bekend in de literatuur als het Grand Canonical Minority Game<sup>9</sup> model. Zij stellen dat dit model adequate beschrijving kan bieden van met name handel op zeer korte tijdschalen (intra-day), waar de agents winst proberen te maken op korte termijn, per transactie.

Er zijn weer  $N$  agents met een geheugen van  $m$  tijdstappen. Aan elke agent zijn weer  $S$  strategieën toebedeeld. Alleen is de situatie nu zo, dat een agent alleen handelt als zijn beste strategie  $bestStrategy[i]$  een hogere score heeft dan een zekere waarde  $r$ . Dit blijkt essentieel te zijn voor het modelleren van realistische prijzen<sup>10</sup>. Verder wordt er ook verondersteld dat er een tijdshorizon  $T$  is waarover de agents de scores van de strategieën 'vergeten'. In het Minority Game model is er alleen sprake van bezoekersaantallen en of deze hoger of lager zijn dan een referentie (een aantal beschikbare stoelen in de bar). Maar

<sup>8</sup> Zie Johnson et al. 2003 Hfst. 4.4 en 4.5 voor een uitgebreidere motivering voor dit model en mogelijke uitbereidingen tot 'realistischer' modellen.

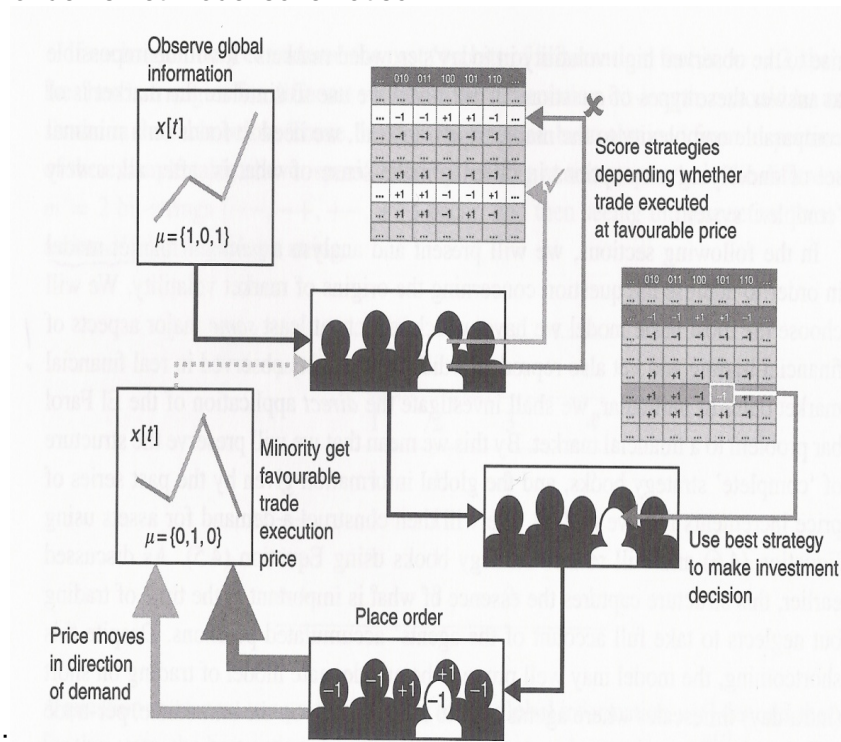
<sup>9</sup> De naam Grand Canonical Minority Game is bedacht in analogie met de modellen in de statistische mechanica waarin het aantal deeltjes in thermodynamisch systeem kan variëren. Hier kunnen de agents besluiten niet te handelen en dus varieert het handelsvolume per tijdstap.

<sup>10</sup> Zie noot 7.

in het markt moeten natuurlijk een prijs hebben en moet een prijsvorming mechanisme expliciet gemodelleerd worden. Tevens moet de beloningsstructuur van de strategieën ( $\text{points}[i][s]$ ) aan deze situatie aangepast worden. Opsommend wordt het model gespecificeerd door de volgende parameters:

- $N$  = aantal agents
- $m$  = 'geheugen' van de agents
- $S$  = aantal strategieën per agent
- $r$  = minimale score welke de beste strategie van een agent moet hebben moet hebben wil deze handelen.
- $T$  = de tijdsspanne waarin de scores van de strategieën worden vergeten.
- $L[t]$  = referentie waar tegen de grootte van de toename in prijs wordt beoordeeld (modelleert de 'aantrekkelijkheid' van de risicovolle belegging ten opzichte van bijvoorbeeld een risicovrij bankdepot)

In figuur 5 hieronder is het model schematisch



weergegeven:

**Figuur 5 schematische weergave van markt model<sup>11</sup>. De agents bepalen hun opdracht op basis de hun beste strategie. Het aggregaat van opdrachten bepaald de uitkomst (prijs omhoog/omlaag). De scores en globale informatie worden aangepast en vervolgens bepalen de agents weer hun beste strategie.**

De figuur geeft het proces goed weer: De agents observeren een gemeenschappelijke binaire bron van informatie die de prijs bewegingen (omhoog/omlaag) representeert. Alleen de laatste  $m$  bits hiervan worden onthouden. De globale informatie wordt weer decimaal gecodeerd, i.e.  $\mu[t] \in \{0, \dots, P - 1\}$  met  $P = 2^m$ . Een strategie  $s \in S$  is weer een actie

<sup>11</sup> Figuur gereproduceerd uit Johnson et al (2003)

$\alpha_s^{\mu[t]} \in \{-1, +1\} = \{\text{verkoop}, \text{koop}\}$  voor elk van de mogelijke  $P$  waarden van  $\mu$  en er zijn dus  $2^P$  mogelijke strategieën. Elke agent heeft een subset  $S$  van deze strategieën en houdt een score  $R_s[t]$  (i.e. `points[i][s]`) bij voor elk van zijn strategieën volgens de volgende beloningsstructuur:

$$R_s[t+1] = \left(1 - \frac{1}{T}\right) R_s[t] - \alpha_s^{\mu[t]} \text{sgn}\left(\frac{D[(t+1)^-]}{\lambda} - L[t+1]\right)$$

Hierin is  $\text{sgn}(x)$  de functie die  $x$  afbeeldt op  $\{-1, 1\}$  afhankelijk of  $x$  negatief respectievelijk positief is.  $D[(t+1)^-] = n_{\text{koop}}[t] - n_{\text{verkoop}}[t]$  stelt het vraag overschot/tekort voor net voor de uitvoering van de transacties op  $t+1$ .  $D[(t+1)^-]/\lambda$  representeert het veronderstelde prijsvormingmechanisme. Een gangbaar model (dat als eerste orde benadering onderbouwd kan worden met argumenten uit de theorie van de microstructuur van markten en ook empirisch bevestigd is) voor de prijsverandering is namelijk

$$\Delta x[t, t-1] = x[t] - x[t-1] = D[t^-]/\lambda.$$

Een vraagoverschot geeft dus een opwaartse druk op de prijs en een aanbodoverschot een negatieve druk. De parameter  $\lambda$  is een maat voor de 'diepte' van de markt en modelleert de gevoeligheid van de markt voor vraag c.q. aanbod overschotten. De timing is belangrijk in de score functie: Het vraagoverschot wordt net voor  $t+1$  geëvalueerd en is dus alleen het resultaat van informatie die op tijdstip  $t$  beschikbaar is (de globale informatie en de strategie scores). De acties van de agents worden echter pas gerealiseerd op tijdstip  $t+1$  als de nieuwe prijs  $x[t+1]$  bekend is, doordat bijvoorbeeld een market maker de prijs zo aanpast dat vraag en aanbod in balans zijn. De agents weten dus niet voor welke prijs hun transactie wordt uitgevoerd op het moment dat zij de opdracht geven. De scorefunctie verhoogd/verlaagd op tijdstip  $t+1$  steeds de score op tijdstip  $t$  (maal een factor  $(1 - 1/T)$  welke de scores verder terug minder zwaar laat tellen) met  $+/-1$ :  $+1$  als gegeven de globale informatie  $\mu[t]$  de door de strategie  $S$  voorgeschreven actie  $\alpha_s^{\mu[t]}$  ongelijk is aan het teken van de prijsverandering (gegeven door  $D[(t+1)^-]/\lambda$ ) ten opzichte van  $L[t+1]$  en  $-1$  anders. Met andere woorden strategieën worden positief beloond als zij de beslissing nemen te verkopen (kopen) als het aantal kopers (verkopers) min verkopers (kopers) groter is dan  $\lambda L[t+1]$ . Als  $L[t+1] = 0$  wordt dus de 'minderheids' beslissing beloond. Om te beargumenteren waarom de 'minderheids' beslissing zinvol is voor de agents beschouwen we de totale rijkdom  $W_i$  van een agent  $i$  als volgt:

$$W_i[t] = \phi_i[t]x[t] + C_i[t]$$

Hierin is  $\phi_t$  het aantal stukken van het verhandelde instrument,  $x$  de prijs en  $C_i$  de hoeveelheid contant geld. Dus door alleen stukken te kopen (verkopen), dat wil zeggen geld uit te wisselen voor aandelen neemt de rijkdom  $W$  niet toe. Om winst te maken ten gevolge van een transactie moet de agent een aandeel kopen (verkopen) en weer verkopen (kopen). In de tabellen hieronder wordt het effect weergegeven van *openvolgende* aankoop en verkoop opdrachten voor de gevallen dat de agent de minderheids respectievelijk meerderheids beslissing neemt.

**Tabel 2 koop en verkoop als de agent dezelfde beslissing als de minderheid neemt**

t	a[t]	$C_i[t]$	$\phi_i[t]$	$x[t]$	$W_i[t]$
1	Geef koopopdracht	100	0	10	100
2	Uitvoer koopopdracht (de meerderheid verkoopt en de prijs wordt naar beneden aangepast) en geef verkoopopdracht	91	1	9	100
3	Uitvoer verkoopopdracht (de meerderheid koopt en de prijs wordt naar boven aangepast)	101	0	10	101

**Tabel 3 koop en verkoop als de agent dezelfde beslissing als de meerderheid neemt**

t	a[t]	$C_i[t]$	$\phi_i[t]$	$x[t]$	$W_i[t]$
1	Geef koopopdracht	100	0	10	100
2	Uitvoer koopopdracht (de meerderheid koopt en de prijs wordt naar boven aangepast) en geef verkoopopdracht	89	1	11	100
3	Uitvoer verkoopopdracht (de meerderheid verkoopt en de prijs wordt naar beneden aangepast)	99	0	10	99

Uit de tabellen is op te maken dat in het geval dat agents deze strategie volgen, handelen volgens de minderheid inderdaad rendabel is. Dit is op zich niet een heel realistisch model voor het gedrag van handelaren, maar er kan aangetoond worden dat (onder bepaalde aannames) deze score functie onder meer algemene omstandigheden ook een goede keuze is (Marsili 2001). De agents gebruiken de strategie  $S$  met de hoogste score, d.w.z.:  $s^{best} = \text{argmax}(\{R_s\})$ , maar handelen alleen als deze score hoger is dan de drempel  $r$ . Alle agents met  $s^{best} < r$  blijven buiten de markt en zo varieert het verhandelde volume per



tijdstap. In de binaire representatie van de informatie  $\mu[t]$  is de meest recente bit nu gedefinieerd door het teken van de prijsverandering  $\Delta x[t, t - 1]$  relatief tot  $L[t]$ , d.w.z.:

$$lastMove = H(D[(t + 1)^-] / \lambda - L[t + 1])$$

Met

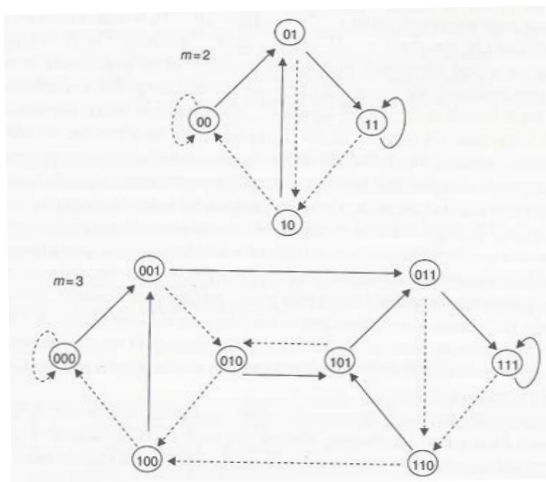
$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

0 staat dus voor een prijsverandering kleiner dan  $L[t]$  en 1 voor een prijsverandering groter dan  $L[t]$ .

De globale informatie wordt steeds aangepast volgens:

$$\mu[t + 1] = (2\mu[t] + lastMove) \text{ modulo } 2^m$$

Beschouw ter illustratie van bovenstaande uitdrukking bijvoorbeeld de situatie voor  $m = 3$ ,  $\mu[t] = 5$  en  $lastMove = 1$  (prijs stijgt) resp. 0 (prijs daalt). De binaire representatie van 5 is 101.  $2 * 5 + 1 = 11$  en  $11 \text{ mod } 8 = 3$ . De binaire representatie van 3 is 011 en we zien dus inderdaad dat de globale informatie correct aangepast is. Als  $lastMove = 0$  krijgen we  $10 \text{ mod } 8 = 2$ , met als binaire representatie 010, ook het correcte resultaat. De mogelijke transities van het proces  $\mu[t]$  liggen op een zogenaamde de Bruijn graaf, zoals weergegeven in figuur 6 voor  $m = 2, 3$ . Elke knoop stelt een mogelijke waarde van de globale informatie voor en de pijlen geven de mogelijke overgangen. In elke tijdstap wordt de laatste bit (up of down move) rechts aan de bitstring toegevoegd en de eerste bit verwijderd. We zien dus voor de situatie zoals hierboven beschreven voor  $m = 3$ , de mogelijke overgangen van 101 naar 011 (laatste beweging was omhoog) en naar 010 (laatste beweging was omlaag).



Figuur 6 de Bruijn graaf voor  $m=2$  en  $m=3$

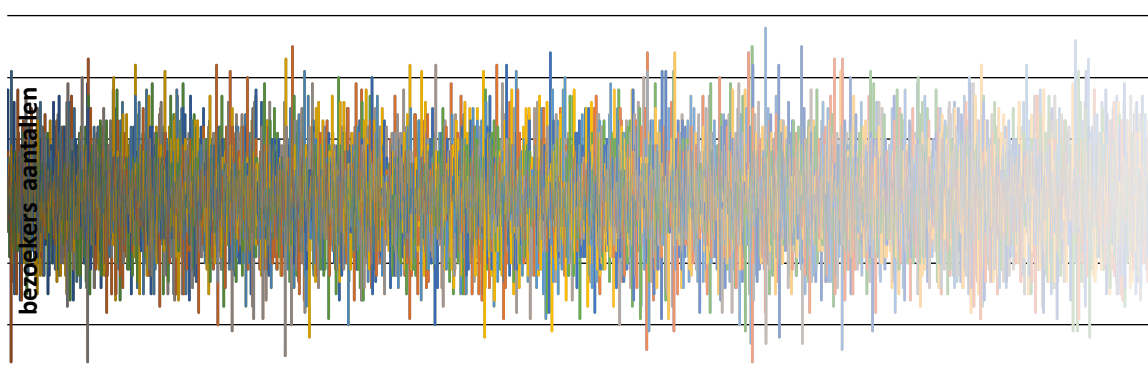
We kunnen het verkregen model dus als volgt samenvatten: Als globale informatie waarop de agents hun beslissingen baseren nemen we de historie van prijsbewegingen  $\Delta x[t, t - 1]$  ten opzichte van  $L[t]$ . We nemen aan dat elke prijsbeweging een functie is van het vraagoverschot in de markt vlak voor  $t$  (i.e. de vraag die opgebouwd is tussen  $t - 1$  en  $t$ ). Het vraagoverschot wordt bepaald door aggregatie van de individuele beslissingen van de agents. Er is dus sprake van een feedback loop: de globale informatie dicteert de beslissingen, de beslissingen creëren een vraag/aanbod overschot en dit creëert weer nieuwe globale informatie door de geïnduceerde prijsverandering. Zo bevat het model dus dit essentiële element.

## Hoofdstuk 5: Resultaten simulaties

Het doel van de simulaties was enerzijds ervaring opdoen met de implementatie van agent-based modellen en anderzijds een kleine experimentele studie te doen naar de hierboven beschreven modellen. Met name zijn we geïnteresseerd of, dergelijk modellen in staat zijn iets van de karakteristieken van financiële markten te kunnen vatten en dus in potentie van nut kunnen zijn om deze beter te begrijpen.

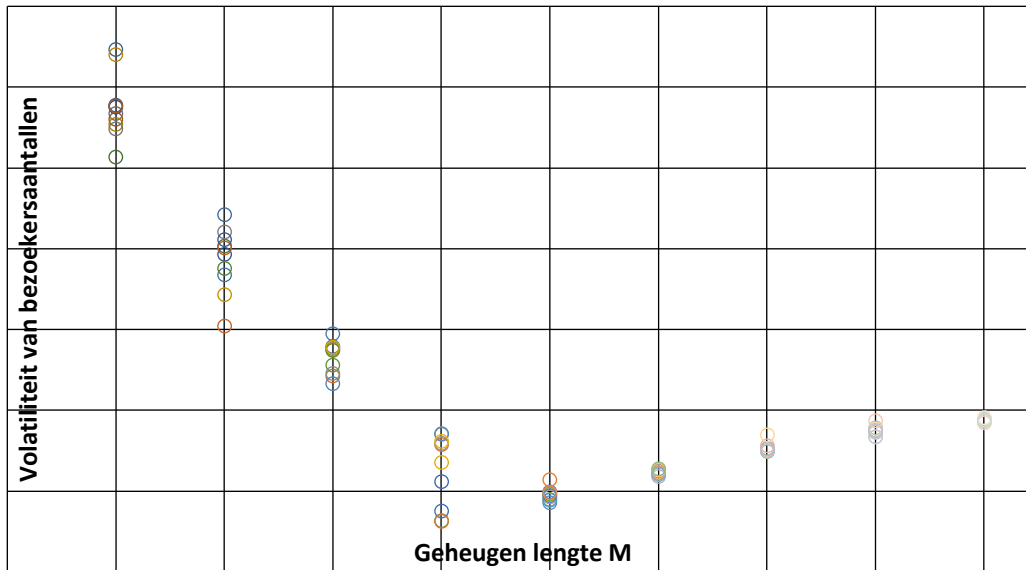
### 5.1 Minority Game Simulaties

In figuur 7 is een typische tijdreeks weergegeven van de bezoekers aantallen. De tijdreeks is bepaald met het simulatieprogramma waarvan de broncode is opgenomen in appendix A1. Deze implementatie volgt in essentie de pseudocode van hoofdstuk 4.1. In elke tijdstap (iteratie) van de simulatie kiezen de agents hun op dat moment beste strategie en nemen de door deze strategie voorgeschreven beslissing: 'ga naar de bar' of 'blijf thuis'. De aggregatie van deze beslissingen geeft dan in elke tijdstap het bezoekersaantal. We hebben gesimuleerd voor een groot aantal initiële strategie allocaties aan de spelers (bepaald door de random initialisatie). De resultaten bleken stabiel over de verschillende initialisaties. De bezoekers aantallen fluctueren rond het optimale bezoekers aantal van  $50.5$  ( $N = 101$ ). Er zijn aanzienlijk fluctuaties rond dit optimum en deze fluctuaties kunnen gezien worden als een maat voor de inefficiëntie in het systeem.



**Figuur 7** Bezoekers aantallen voor een simulatie run met  $M=4$ ,  $S=2$  en  $N=101$

In figuur 8 is de volatiliteit (standaarddeviatie) van de bezoekers aantallen geplot tegen de geheugenlengte van de agents.



**Figuur 8** Volatilititeit versus geheugen lengte voor het Minority Game model

Voor elke  $m$  zijn 10 simulaties uitgevoerd. Er zijn kwalitatief verschillende regimes of fasen te onderscheiden. Voor grote  $m$  is de informatie te complex (er zijn  $2^m$  mogelijke histories) om coördinatie mogelijk te maken tussen de agents. De agents gedragen zich in dit regime steeds meer alsof ze een willekeurige strategie (i.e. kies -1 of 1 met kans  $\frac{1}{2}$ ;  $S = 2$ ) volgen. De volatilititeit convergeert dan ook naar  $10 \approx \sqrt{101} = \sqrt{N}$ . En dit is inderdaad de standaard deviatie van een random variabele  $X \in \{-1,1\} \sim \text{Bin}(N, \frac{1}{2})$ . Voor kleine  $m$  groeit de volatilititeit doordat hier op een gegeven moment de kans groot is dat er een groot aantal agents zal zijn met dezelfde (door hen als beste beschouwde) strategie en deze in grote groepen (*crowds*) dezelfde beslissing zullen nemen. Dit fenomeen wordt ‘*crowding in de strategieruimte*’ genoemd en veroorzaakt grote fluctuaties in de bezoekersaantallen. Als het geheugen van de agents groter is zal de groep van agents die dezelfde strategie gebruiken kleiner zijn, omdat de meeste agents niet meer de beste strategie tot hun beschikking hebben. In dit tussenliggende regime is de kans ook aanwezig dat er ook agents zijn die gedwongen zijn om een *antigecorreleerde* strategie (de slechtste presterende strategie) te gebruiken (zie Johnson 2003 hfst. 4.8.2 en 4.8.3). Een voorbeeld van een paar *antigecorreleerde* strategieën voor  $m = 2$  is  $\{\text{actie voor } 00, 01, 10, 11\} = \{1, 1, 1, 1\}$  respectievelijk  $\{-1, -1, -1, -1\}$ . Twee agents die deze strategieën volgen zullen onafhankelijk van de historie tegengestelde beslissingen nemen. Deze groep agents kan als een *anti-crowd* bestempeld worden en zij heffen de invloed van de *crowds* als het ware op. Dit drukt de volatilititeit. Dus in de limiet van kleine  $m$  is de strategieruimte klein en zal elke agent een aanzienlijk gedeelte van alle mogelijke strategieën tot zijn beschikking hebben en dus is de kans groot dat deze agents, de beste strategie of een vergelijkbare strategie tot hun

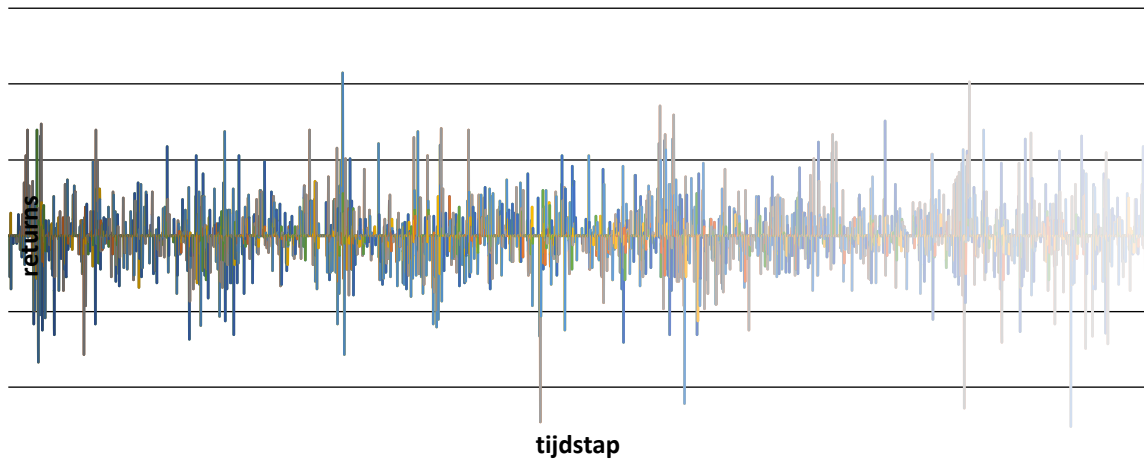
beschikking hebben. Weinig agents zullen alleen de anti-gecorrleerde (of vergelijkbare) strategie tot hun beschikking hebben, er zijn dus bijna geen *anti-crowds* en de *crowds* domineren de dynamica. In het tussenliggende regime, waar het minimum van de volatiliteit ligt, is de grootte van de strategieruimte relatief groot. De kans is hier aanwezig dat sommige agents opgezadeld zijn met alleen op een gegeven tijdstip slecht presterende strategieën. Hier is de kans op de vorming van anticrowds dus groter. Als het geheugen verder toeneemt wordt het hoogst onwaarschijnlijk dat twee willekeurige agents dezelfde (of gecorrleerde/antigecorrleerde) strategie bezitten en gedragen zij zich als collectief als een groep random agents. Zelfs als een agent verscheidene slecht scorende strategieën heeft is de kans dat zijn best scorende strategie strikt anti-gecorrleerd is ten opzichte van de beste strategie van een andere agent (en dus een *crowd-anti-crowd* paar vormt) klein. Johnson et al. (Johnson 2003 hfst. 4.8) hebben met analytische methoden ook deze relatie tussen de volatiliteit en de geheugen lengte (of meer precies, blijkt de volatiliteit af te hangen van  $P/N = 2^m/N$  en niet van  $m$  en  $N$  onafhankelijk) aan kunnen tonen. Zij vonden de in de onderstaande tabel weergegeven eigenschappen van de verschillende regimes, die de gevonden resultaten en interpretatie verduidelijken.

Geheugen $m$	$2^{m+1} \ll N_S$	$2^{m+1} \sim N_S$	$2^{m+1} \gg N_S$
<b>Crowd grootte</b>	Groot	Medium	$\sim 1$
<b>Anticrowd grootte</b>	Klein	Medium	$\sim 0$
<b>Netto crowd-anticrowd grootte</b>	Groot ( $\gg 1$ )	Klein	Klein ( $\sim 1$ )
<b>Aantal crowd-anticrowd paren</b>	$\sim 2^m$ en $\ll N$	$\sim 2^m$ en $< N$	$< 2^m$ en $\sim N$

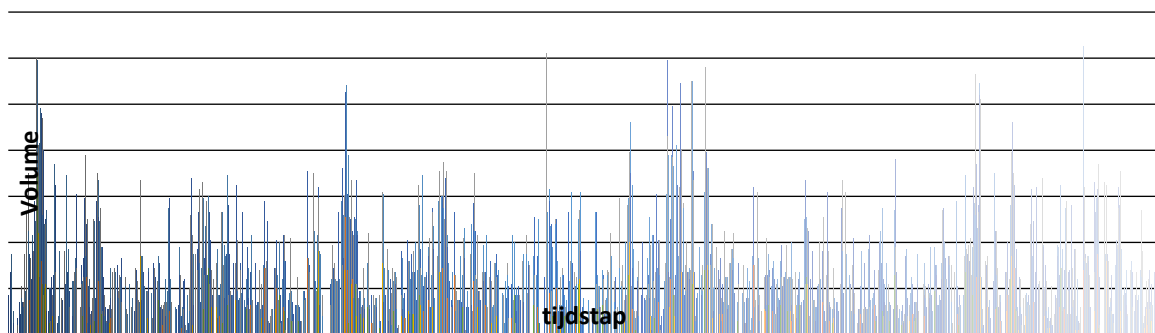
Het feit dat het model, naast dat het te simuleren is, ook eenvoudig genoeg is om met analytische methoden te bestuderen, is een van de sterke eigenschappen van het model..



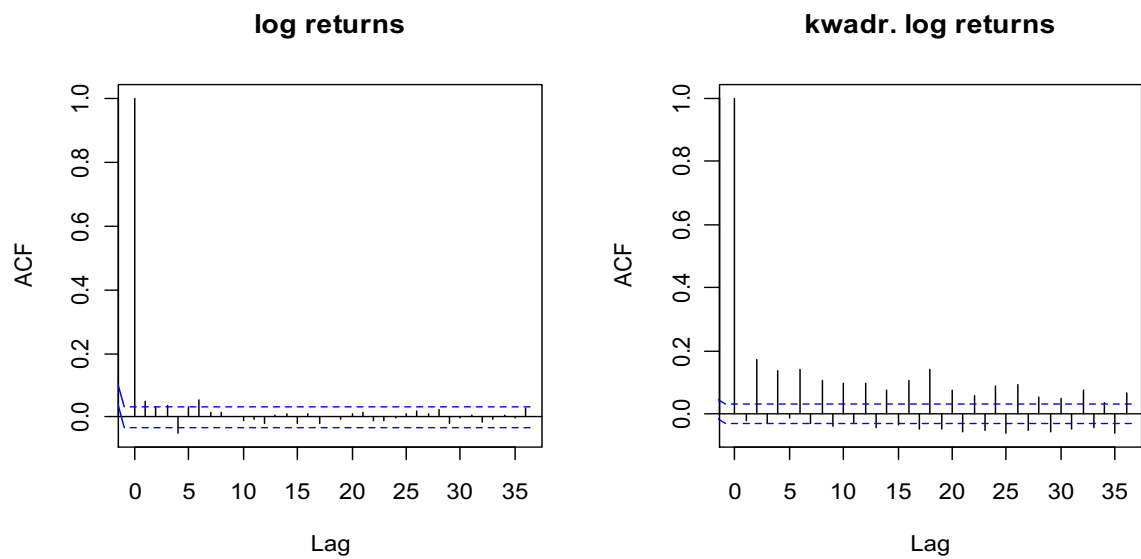
initialisaties de simulaties instabiel waren en bovendien zoals gezegd zeer gevoelig voor kleine variaties in de parameters.



Figuur 10 returns markt model  $r = 7$ ,  $m = 3$

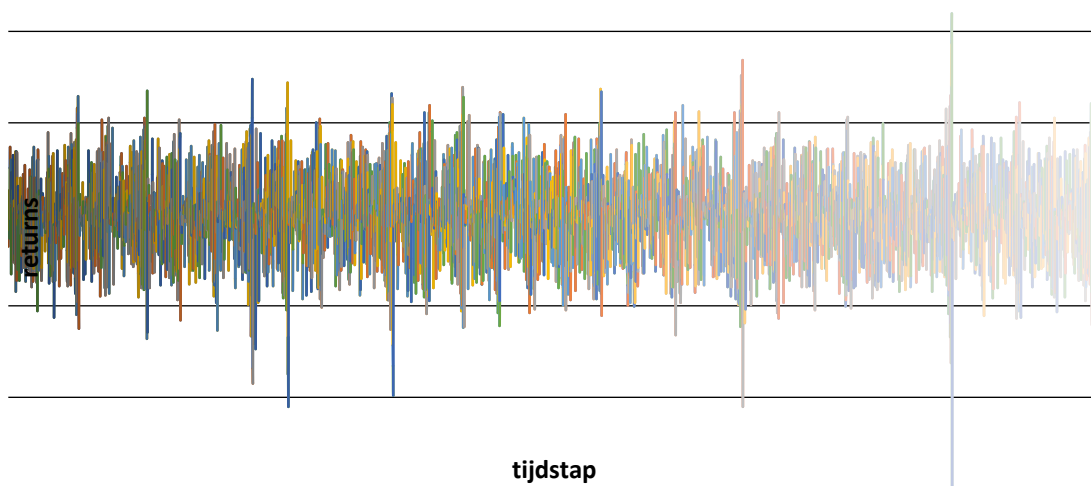


Figuur 11 volume markt model met  $r=7$  en  $m=3$



Figuur 12 correlogrammen returns en kwadratische returns markt model voor  $r=7$  en  $m=3$

Om te onderzoeken of de structuur van de markt zou veranderen bij lagere drempel om te handelen  $r$  en groter geheugen (meer richting 'random' fase) hebben we experimenten voor verschillende  $r$  en  $m$  uitgevoerd. Helaas waren er geen structureel reproduceerbare veranderingen te zien. Hieronder zijn de resultaten weergegeven voor  $r = 1$  en  $m = 6$ . In figuur 14 is nu te zien dat het volume veel minder sterk varieert. De kurtosis van returns is nu kleiner dan 4. Dit is in overeenstemming met het idee dat een grote groep agents die buiten de markt is op een bepaald moment en de dezelfde 'beste' strategie heeft die opeens succesvol blijkt, de markt overspoelt en voor grote prijsbewegingen zorgt. Dit effect is dus veel minder voor kleinere  $r$ , zoals geldt voor de resultaten hieronder. De correlogrammen in figuur 15 laten wel zien dat de typische autocorrelatie structuren wel behouden zijn. Maar wederom is hier de kanttekening bij te plaatsen dat deze resultaten vrij afhankelijk zijn van individuele simulatie runs en niet zeer algemeen reproduceerbaar zijn, dat wil zeggen, gegeven een parameterset, gaven verschillende initialisaties zeer uiteenlopende resultaten.

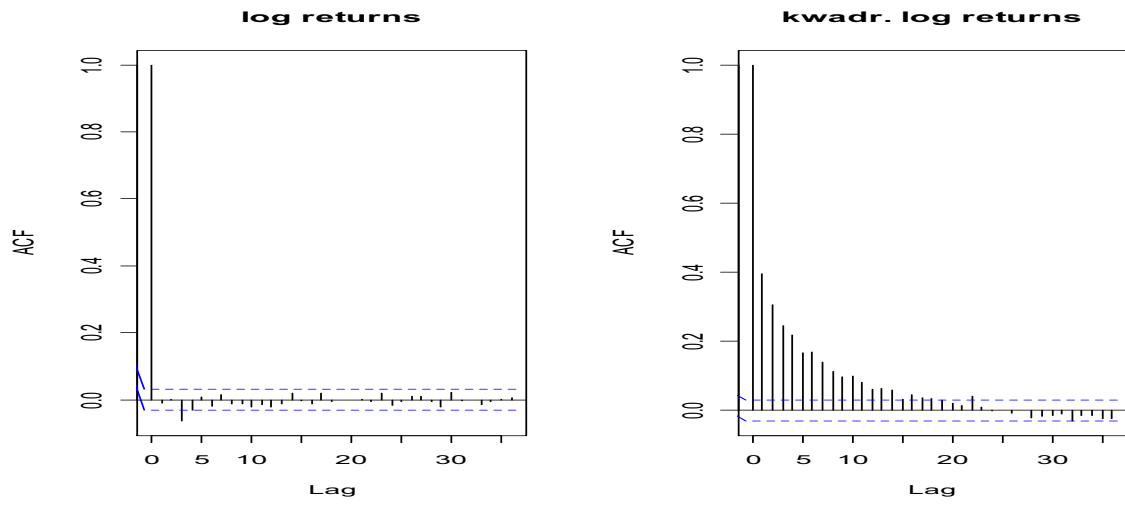


Figuur 13 returns markt model voor  $r=1$  en  $m=6$



Figuur 14 volume markt model voor  $r=1$  en  $m=6$





Figuur 15 correlogrammen markt model voor  $r=1$  en  $m=6$

## Conclusie

Hoewel niet geheel bevredigend zijn er toch wat interessante resultaten uit onze simulaties naar voren gekomen. We zouden voorzichtig kunnen concluderen dat de agent-based modellen zoals bestudeerd in deze paper een zeker potentieel bezitten om naast de klassieke methoden een rol te verwerven in de studie van financiële markten en complexe systemen in algemeen. Naast de modellen hier bestudeerd zijn er nog vele andere type agent-based modellen<sup>12</sup> en het is niet onredelijk om te veronderstellen dat het onderzoeksgebied zich nog niet een 'volwassen' fase bevindt. Hoewel dit natuurlijk moeilijk te voorspellen is, is onze verwachting dat in de toekomst dergelijke modellen verder ontwikkeld zullen worden. Op dit moment is vooral nog een groot obstakel hoe aansluiting te vinden met echte financiële markten en praktische toepassingen. Het is wel duidelijk dat de modellen inzicht kunnen geven in mogelijke onderliggende mechanismen van financiële markten, maar hoe de stap te maken van 'intuïtie' hulpmiddelen naar rigoureuze bruikbare 'tools', die impact in de praktijk kunnen hebben is op dit moment een open vraag. Een sterk punt van de Minority Game modellen is wel dat er voor deze modellen ook analytische resultaten beschikbaar zijn hoewel deze wat onderbelicht zijn geweest in de context van deze paper. Door de ervaringen met de simulaties is duidelijk geworden dat dergelijke analytische resultaten van groot van belang kunnen zijn om 'grip' te krijgen om te simulatie resultaten, aangezien de simulaties naarmate hun complexiteit toeneemt zeer gevoelig worden voor kleine variaties in implementatie of waarden van parameters. De praktische ervaring met agent-based simulaties opgedaan tijdens in de context van deze paper is als waardevol ervaren, hoewel het soms ook een zeer tijdrovende zaak bleek. Desalniettemin is zeker de interesse gewekt de ontwikkelingen van agent-based modeling in de toekomst te blijven volgen.

---

<sup>12</sup> bijvoorbeeld modellen die expliciet lokale interacties modelleren, zie bijvoorbeeld hfst 5 van Johnson et al. 2003

## Literatuur

Arthur, B. (1994). *Bounded Rationality and Inductive Behavior (the El Farol Problem)*, American Economic Review, 84,406-411.

Beinhocker E.D. (2007). *The origin of wealth: evolution, complexity, and the radical remaking of economics*. Random House Business Books. London.

Challet, D., Zhang, Y.C. (1997). *Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game*. Physica A 246, 407.

Challet, D., Marsili, M., Ottino, G. (2004). *Shedding Light on El Farol*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol 332: 469-482

Challet, D. Marsili, M. Zhang, Y.C. (2005). *Minority Games: interacting agents in financial markets*. Oxford University Press. Oxford.

Farmer, J.D. (1999). *Physicists attempt to scale the ivory towers of finance*. Computing in Science and Engineering, Nov-Dec, 26-39.

Johnson, N.F., Jefferies, F., Hui, P.M. (2003). *Financial Market Complexity: what physics can tell us about market behaviour*. Oxford University Press. Oxford.

Marsili, M. (2001). *Market Mechanism and Expectations in Minority and Majority Games*. Physica A, Vol. 229: 93-103.

McNeil, Frey, Embrechts (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, Tools*. Princeton University Press. New Jersey

Press, W.H. Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and Vetterling, W.T. (1993). *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press. [www.nr.com](http://www.nr.com). Cambridge

# Appendices

## A1 Source Code Simulatie

### Minority Game Source Code<sup>13</sup>

```
#include <stdio.h>
#include <memory.h>
#include "ran2.c"

int main (int argc, char *argv[])
{
    long idum, mu, nu;
    int N, S, M, P, NIT, NITP, TEQ;
    int i, j, it, winBit, A, **a, *s;
    long **U, *avgA, *T;
    double alpha, sigma2, H;

    //The text file for the results
    FILE *file;
    file = fopen("c:\\temp\\file.txt","a+"); // apend file (add text to a
file or create a file if it does not exist.

    if (argc==6)
    {
        i = 1;
        M = atoi(argv[i++]);
        N = atoi(argv[i++]);
        S = atoi(argv[i++]);
        NITP = atoi(argv[i++]); // number of iterations /P
        idum = atoi(argv[i++]); // random generator's seed
    }
    else
    {
        //tijdelijk parameters hardcoded initialiseren
        i = 1;
        M = 4;
        N = 101;
        S = 2;
        NITP = 500; // number of iterations /P
        idum = -456345; // random generator's seed
        //printf("parameters: M N S NTIP idum need to be
supplied\n\n");
        //getchar();
        //exit(-1);
    }

    P = 1<<M; //P = 2^M
    NIT = NITP*P;
    TEQ = 200*P;
    NIT += TEQ;
```

---

<sup>13</sup> (aanpassing van Challet et al. 2005 appendix B)

```

// memory allocation
a = (int ***)calloc(N, sizeof(int)); // a is 3D array, so pointer to a
pointer to a pointer to a array of N integers?
// a contains
the choice (-1 stay home (sell) or +1 go to the bar (buy) for player i, for
each strategy j and history mu
// there are P
different histories.
s = (int *)calloc(N, sizeof(int)); // The best strategies of all N
players (or the strategy to be used)
U = (int **)calloc(N, sizeof(int)); // The strategy scores for player
i and strategy j
avgA = (long *)calloc(P, sizeof(int));
T = (long *)calloc(P, sizeof(int));
for (i=0; i<N; i++)
{
    a[i] = (int **)calloc(S, sizeof(int));
    U[i] = (int *)calloc(S, sizeof(int));
    for (j=0; j<S; j++)
    {
        a[i][j] = (int *)calloc(P, sizeof(int));
    }
}

// initialisation of the players
for (i=0; i<N; i++)
{
    for (j=0; j<S; j++)
    {
        for (mu=0; mu<P; mu++)
        {
            a[i][j][mu] = 2 * (int) (2*ran2(&idum)) - 1; //
a[i][j][mu] = -1 or 1
        }
        U[i][j] = 0; // tabula rasa
        s[i] = 0; // s[i] is the strategy to be used by agent i
    }
}

// beginning of the game
mu = (int) (ran2(&idum)*P); // mu(t=0) is randomly drawn
sigma2 = 0;

for (it=0; it<NIT; it++)
{
    if (it==TEQ) // resets the measured quantities if the
equilibration time is reached
    {
        sigma2 = 0;
        for (nu=0; nu<P; nu++)
        {
            avgA[nu] = 0;
            T[nu];
        }
    }

    //printf("%d\n", A); //tijdelijk print attendance difference?
    //write result to file
    fprintf(file, "%d\n", A); // writes

    A = 0; // A(t)
}

```

```

for (i=0; i<N; i++) // choose strategy to be used
{
    for (j=0; j<S; j++)
    {
        if (U[i][s[i]] == U[i][j])
        {
            if (ran2(&idum)<0.5) // breaks ties
            {
                s[i] = j;
            }
        }
        else
        {
            if (U[i][s[i]]<U[i][j])
            {
                s[i] = j;
            }
        }
    }
    A += a[i][s[i]][mu];
}
avgA[mu] += A; // builds <A/mu>
T[mu]++; // number of times mu appears
sigma2 += (double) (A*A);

// determination of the winning side
if (A>0)
{
    winBit = 0;
}
else
{
    winBit = 1;
}

// update of the strategy scores
for (i=0; i<N; i++)
{
    for (j=0; j<S; j++)
    {
        U[i][j] += -a[i][j][mu] * A;
    }
}

//update of the history
mu = (2*mu) % P + winBit; // real histories
//mu = (int) (ran2(&idum)*P); //random histories
}
H=0.;

for (mu=0; mu<P; mu++)
{
    if (T[mu]>0)
    {
        H += ( (double) avgA[mu] * (double) avgA[mu] ) /
(double) T[mu];
    }
}
H /= (double) ((NIT-TEQ)*N);
sigma2 /= (double) ((NIT-TEQ)*N);

```

```

alpha = (double)P / (double)N;
printf("%e %e %e\n", alpha, sigma2, H);

fclose(file); // close the stream
getchar();
}

```

### Market Model (GCMG) Source Code<sup>14</sup>

```

#include <stdio.h>
#include <memory.h>
#include "ran2.c"

int main (int argc, char *argv[])
{
    long idum, mu, nu;
    int N, S, M, P, NIT, NITP, TEQ;
    int i, j, it, lastMove, winBit, A, B, ***a, *s;
    long **U, *avgA, *T;
    double alpha, sigma2, H, random;
    double price; //De prijs
    double priceChange; //
    double volume; //het verhandelde volume
    double thresh; //the threshold to trade
    long tijd; //vergeet tijd
    double L; //referentie asset
    int lambda;
    int counter = 0;

    //The text file for the results
    FILE *file;
    file = fopen("c:\\temp\\resultsMG.txt", "w+"); // append file (add text
to a file or create a file if it does not exist.

    if (argc==6)
    {
        i = 1;
        M = atoi(argv[i++]);
        N = atoi(argv[i++]);
        S = atoi(argv[i++]);
        NITP = atoi(argv[i++]); // number of iterations /P
        idum = atoi(argv[i++]); // random generator's seed
    }
    else
    {
        //tijdelijk parameters hardcoded initialiseren
        i = 1;
        M = 6;
        N = 500;
        S = 2;
        NITP = 500; // number of iterations /P
        idum = -7659767; // random generator's seed
        //idum = -7, -76597, -6433, -848484
    }

    //set parameters and initialize vars for the market model
    price = 10; //the initial price
    volume = 0;

```

---

<sup>14</sup> Zie noot 4

```

thresh = 1; //thresh = 3,4,5,7,8,10;
tijd = 100;
L = 0; //L = .00001; //L = -.00001;
lambda = 10000;

P = 1<<M; //P = 2^M
NIT = NITP*P;
TEQ = 200*P;
NIT += TEQ;

// memory allocation
a = (int ***)calloc(N, sizeof(int)); // a is 3D array, so pointer to a
pointer to a pointer to a array of N integers?
// a contains
the choice (-1 stay home (sell) or +1 go to the bar (buy) for player i, for
each strategy j and history mu
// there are P
different histories. (side[i][j][mu] in the pseudo code
s = (int *)calloc(N, sizeof(int)); // The best strategies of all N
players (or the strategy to be used) (bestStrategy[i] in the pseudo code
U = (int **)calloc(N, sizeof(int)); // The strategy scores for player
i and strategy j (points[i][j] in the pseudo code)
avgA = (long *)calloc(P, sizeof(int));
T = (long *)calloc(P, sizeof(int));
for (i=0; i<N; i++)
{
    a[i] = (int **)calloc(S, sizeof(int));
    U[i] = (int *)calloc(S, sizeof(int));
    for (j=0; j<S; j++)
    {
        a[i][j] = (int *)calloc(P, sizeof(int));
    }
}

// initialisation of the players
for (i=0; i<N; i++)
{
    for (j=0; j<S; j++)
    {
        for (mu=0; mu<P; mu++)
        {
            a[i][j][mu] = 2 * (int)(2*ran2(&idum)) - 1; //
a[i][j][mu] = -1 or 1
        }
        U[i][j] = 0; // tabula rasa
        s[i] = 0; // s[i] is the strategy to be used by agent i
    }
}

// beginning of the game
mu = (int) (ran2(&idum)*P); // mu(t=0) is randomly drawn
sigma2 = 0;

for (it=0; it<NIT; it++)
{
    if (it==TEQ) // resets the measured quantities if the
equilibration time is reached
    {
        sigma2 = 0;
        price = 10;
        //volume = 0;
    }
}

```



```

        for (nu=0; nu<P; nu++)
        {
            avgA[nu] = 0;
            T[nu];
        }
    }

    if (it >= TEQ)
        fprintf(file,"%f %f %f %f %f\n", price, priceChange,
volume, (float)B, (float)A); // writes if in steady state

A = 0; // A(t)
B = 0;
volume = 0;
for (i=0; i<N; i++) // choose strategy to be used
{
    for (j=0; j<S; j++)
    {
        if (U[i][s[i]] == U[i][j])
        {
            if (ran2(&idum)<0.5) // breaks ties
            {
                s[i] = j;
            }
        }
        else
        {
            if (U[i][s[i]]<U[i][j])
            {
                s[i] = j;
            }
        }
    }

    //only trade if beste score greater then threshold
    if (U[i][s[i]] >= thresh)
    {
        volume++;
        A += a[i][s[i]][mu]; //excess demand
    }
    //A += a[i][s[i]][mu]; //excess demand
}

priceChange = (double)A/lambda;
price = price*(1+priceChange);
avgA[mu] += A; // builds <A/mu>
T[mu]++; // number of times mu appears
sigma2 += (double) (A*A);

// determination of up/down move asset relative to L
if (priceChange>L)
{
    lastMove = 1;
}
else if(priceChange<L)
{
    lastMove = 0;
}
else

```

```

        {
            random = ran2(&idum);
            if (random < 0.5)
                lastMove = 1;
            else
                lastMove = 0;
        }

        // update of the strategy scores
        for (i=0; i<N; i++)
        {
            for (j=0; j<S; j++)
            {
                if (lastMove==1)
                    U[i][j] = (1-(double) (1/tijd)) * U[i][j] -
a[i][j][mu]; //sell wins
                else
                    U[i][j] = (1-(double) (1/tijd)) * U[i][j] +
a[i][j][mu]; //buy wins
            }
        }

        //update of the history
        mu = (2*mu) % P + lastMove; // real histories
    }
    fclose(file); // close the stream
}

```

### Random number generator source code<sup>15</sup>

```

#define IM1 2147483563
#define IM2 2147483399
#define AM (1.0/IM1)
#define IMM1 (IM1-1)
#define IA1 40014
#define IA2 40692
#define IQ1 53668
#define IQ2 52774
#define IR1 12211
#define IR2 3791
#define NTAB 32
#define NDIV (1+IMM1/NTAB)
#define EPS 1.2e-7
#define RNMX (1.0-EPS)

float ran2(long *idum)
{
    int j;
    long k;
    static long idum2=123456789;
    static long iy=0;
    static long iv[NTAB];
    float temp;

    if (*idum <= 0)
    {

```

---

<sup>15</sup> Press et al. 1993

```

    if (-(*idum) < 1)
        *idum = 1;
    else
        *idum = -(*idum);
    idum2 = (*idum);
    for (j = NTAB+7; j >= 0; j--)
    {
        k = (*idum)/IQ1;
        *idum = IA1*(*idum - k*IQ1) - k*IR1;
        if (*idum < 0)
            *idum += IM1;
        if (j < NTAB)
            iv[j] = *idum;
    }
    iy = iv[0];
}
k = (*idum)/IQ1;
*idum = IA1*(*idum - k*IQ1) - k*IR1;
if (*idum < 0)
    *idum += IM1;
k = idum2/IQ2;
idum2 = IA2*(idum2 - k*IQ2) - k*IR2;
if (idum2 < 0)
    idum2 += IM2;
j = iy/NDIV;
iy = iv[j] - idum2;
iv[j] = *idum;
if (iy < 1)
    iy += IMM1;
if ((temp = AM*iy) > RNMX)
    return RNMX;
else
    return temp;
}

```