Vraagvoorspelling en bestelregels in de retail

Een vergelijking tussen theorie en praktijk

BWI werkstuk geschreven door:
Marianne Horsch
student nummer: 1202790

10 januari 2005

Inhoudsopgave

1 Probleem stelling 4

I Vraagvoorspelling 5

2 Inleiding 6

3 Vraagvoorspelling 6
3.1 Het constante model 6
3.2 Het trend model 7
3.3 Het trend - seizoen model 7
3.4 Het voortschrijdende gemiddelde 8
3.5 Exponential smoothing 9
3.6 Exponential smoothing met trend 12
3.7 Winters' trend seizoen model 14

4 Voorspellingsfouten 16

5 Conclusie 18

6 Samenvatting 20

II Bestelregels 22

7 Inleiding 23
7.1 Besteleenheden 23
7.2 Levertijden 23
7.3 Houdbaarheidsdata 23
7.4 Nee-verkopen 23

8 Voorraadmodellen 23

9 De vraag 24

10 De nee-verkopen 25
10.1 Service levels 25
10.2 De kosten van nee-verkopen 25

11 De bestelstrategie 26

12 De bestelstrategie met gebruik van een service level 26

13 Een Poisson verdeelde vraag een vaste λ 27
13.1 Wanneer niet bestellen 27
13.2 Hoeveel te bestellen 28

14 Een Poisson verdeelde vraag met een variabele λ **29**
14.1 Situatie 1: $L \leq Z_1$ . . . 30
14.1.1 Wanneer niet bestellen . . . 30
14.1.2 Hoeveel te bestellen . . . 31
14.2 Situatie 2: $L > Z_1$ . . . 33
14.2.1 Wanneer niet bestellen . . . 33
14.2.2 Hoeveel te bestellen . . . 35

15 De bestelstrategie met gebruik van kosten van nee-verkopen **37**
15.1 Kosten bij niet bestellen . . . 38
15.2 Kosten bij wel bestellen . . . 39

16 Een Poisson verdeelde vraag met vaste λ **40**
16.1 Kosten bij niet bestellen . . . 40
16.2 Kosten bij wel bestellen . . . 41

17 Een Poisson verdeelde vraag met een variabele λ **43**
17.1 Situatie 1: $L \leq Z_1$ . . . 43
17.1.1 Kosten bij niet bestellen . . . 43
17.1.2 Kosten bij wel bestellen . . . 45
17.2 Situatie 2: $L > Z_1$ . . . 48
17.2.1 Kosten bij niet bestellen . . . 48
17.2.2 Kosten bij wel bestellen . . . 50

18 Conclusie **54**

19 Samenvatting **55**

A Een service level: Poisson verdeelde vraag met een vaste λ **60**

B Een service level: Poisson verdeelde vraag met een variabele λ **60**
B.1 Situatie 1: $L \leq Z_1$ . . . 60
B.1.1 Wanneer niet bestellen . . . 60
B.1.2 Hoeveel te bestellen . . . 61
B.2 Situatie 2: $L > Z_1$ . . . 62
B.2.1 Wanneer niet bestellen . . . 62
B.2.2 Hoeveel te bestellen . . . 63

C Kosten: een Poisson verdeling met variabele λ **65**
C.1 Situatie 1: $L \leq Z_1$ . . . 65
C.1.1 Kosten bij niet bestellen . . . 65
C.1.2 Kosten bij wel bestellen . . . 66
C.2 Situatie 2: $L > Z_1$ . . . 66
C.2.1 Kosten bij niet bestellen . . . 66
C.2.2 Kosten bij wel bestellen . . . 67

Dit is een gesensureerde versie van mijn BWI werkstuk. De hoofdstukken over Albert Heijn zijn hieruit weggelaten.

1 Probleem stelling

In dit werkstuk wil ik een vergelijking maken tussen theorie en praktijk over vraagvoorspelling en bestelregels in de retail. Er wordt in het bijzonder een vergelijking gemaakt tussen de theorie en de toepassing binnen Albert Heijn.
Het werkstuk is opgedeeld in 2 delen. Het eerste deel gaat over vraagvoorspelling, de theorie hierover en de toepassing binnen Albert Heijn. Het tweede deel gaat over bestelregels, met wederom de theorie hierover en de toepassing binnen Albert Heijn.

De vragen die ik wil beantwoorden zijn:

- Vraagvoorspelling
  - Welke theorie bestaat er over vraagvoorspelling die toepasbaar kan zijn in de retail?
  - Hoe voorspelt Albert Heijn de vraag?
- Bestelregels
  - Welke theorie bestaat er over bestelregels die toepasbaar kunnen zijn in de retail?
  - Hoe bestelt Albert Heijn?

Deel I
Vraagvoorspelling

2 Inleiding

In dit deel van het werkstuk wil ik theorieën bespreken om de vraag te voorspellen, in het bijzonder de voorspelling van de vraag morgen aan de hand van data tot en met vandaag. Dit voorspellen is dus gebaseerd op historische data.
Voor het voorspellen van de vraag op basis van historische data zijn vele modellen beschikbaar. Deze modellen, die toepasbaar kunnen zijn in de retail, wil ik bespreken. Daarna wordt besproken hoe de vraag wordt voorspeld bij Albert Heijn. Ik eindig dit deel met een conclusie over de toepasbaarheid van de theoretische modellen in de praktijk.

De voorbeelden gegeven in dit deel van het werkstuk zijn gebasseerd op zelf bedachte data die niet representatief zijn voor de praktijk.

3 Vraagvoorspelling

Om te berekenen wanneer en hoeveel er besteld moet worden, moet de vraag van ieder artikel voorspeld worden. Dit doen we door middel van een puntschatting, we schatten de gemiddelde verwachte vraag op basis van historische data. De standaard deviatie van de vraag definiëren we als de standaard deviatie van de werkelijk vraag over de afgelopen i perioden.

De meest gebruikte methode om de vraag te voorspellen, is het voorspellen op basis van historische data.
Er zijn verschillende soorten vraagmodellen die allemaal verschillende aannames hebben. Daarom zullen we eerst de eigenschappen van artikelen bespreken.
Aangenomen wordt dat de vraag naar alle artikelen in een supermarkt onderling onafhankelijk is. Dit is niet altijd correct, bijvoorbeeld als van een product een bepaald merk is uitverkocht zal de vraag naar een soortgelijk product van een ander merk toenemen.
Verder zijn er seizoensartikelen. Sommige van deze artikelen worden alleen in het betreffende seizoen verkocht, zoals pepernoten. Andere worden het hele jaar verkocht, maar gedurende bepaalde seizoenen meer. Een voorbeeld hiervan zijn pasteibakjes, hiervan worden er rond de kerst meer verkocht.

3.1 Het constante model

Het constante model (Hoofdstuk 2.2 uit [1]) is het meest eenvoudige vraagmodel. Het model is gebaseerd op de aanname dat de vraag in verschillende perioden kan worden weergegeven door de gemiddelde vraag met daarbij opgeteld onafhankelijke random trekkingen uit de normale verdeling met verwachting 0 en standaard deviaties van de werkelijke vraag over de afgelopen i perioden. Van de gemiddelde vraag wordt aangenomen dat deze constant is.

We voeren de volgende notatie in:
x_t = vraag in periode t,
a = gemiddelde vraag per periode,
ε_t = een random trekking uit de normale verdeling met verwachting 0 en standaard deviatie van de werkelijke vraag over de afgelopen i perioden.
Aangenomen wordt dat a per periode bijna niet fluctueert.

Het model voor de vraag in periode t is nu als volgt:

$$x_t = max(0, a + \varepsilon_t).$$

In hoofdstuk 3.4 en 3.5 bespreek ik twee methoden hoe a geschat kan worden.

3.2 Het trend model

Als kan worden aangenomen dat de vraag systematisch zal stijgen (of dalen) in een bepaalde periode, dan kan gebruik worden gemaakt van een aanpassing op het constante model met een lineaire trend (Hoofdstuk 2.2 uit [1]). We definiëren lineaire trend als een constante stijging of daling in de vraag per periode. Dit model kan bijvoorbeeld worden gebruikt bij de introductie van nieuwe artikelen.

We voeren de volgende notatie in:
a = gemiddelde vraag in periode 0,
b = de trend.
Aangenomen wordt dat de trendparameter (b) bijna gelijk blijft per periode.

Het model voor de vraag in periode t is nu als volgt:

$$x_t = max(0, a + bt + \varepsilon_t).$$

In hoofdstuk 3.6 bespreek ik hoe a en b geschat kunnen worden.

3.3 Het trend - seizoen model

Als bekend is dat de vraag in een bepaald seizoen met x procent toeneemt kan men het trend - seizoen model gebruiken (Hoofdstuk 2.2 uit [1]).

We voeren de volgende notatie in:
F_t = seizoensindex in periode t.
Als bijvoorbeeld $x = 20\%$ dan is $F_t = 1.2$ in een bepaalde periode.

Het model voor de vraag in periode t is nu als volgt:

$$x_t = max(0, (a + bt)F_t + \varepsilon_t).$$

Wel moet worden voldaan aan de eis dat, als er T perioden in een jaar zitten geldt:

$$\sum_{k=1}^{T} F_{t+k} = T,$$

en dat geldt:

$$F_{t+T} = F_t.$$

Dit model kan worden gebruikt voor artikelen die bijvoorbeeld rond de kerst meer worden verkocht.

In hoofdstuk 3.7 bespreek ik hoe a, b en F_t geschat kunnen worden.

3.4 Het voortschrijdende gemiddelde

We nemen aan dat de vraag wordt weergegeven door het constante model en dat de ε_t een normale verdeling bezit met verwachting 0 en standaard deviatie van de werkelijke vraag over de afgelopen i perioden. We willen de waarde van a benaderen. Als a geheel constant is zal de beste benadering het gemiddelde zijn van alle historische x_t. Echter, a kan veranderen. Dit betekent dat de meest recente x_t de meest getrouwe waarden van a oplevert. Dit is het principe van het voortschrijdend gemiddelde (zie bijvoorbeeld Hoofdstuk 2.3 uit [1], Hoofdstuk 4.5.1 uit [5] en Hoofdstuk 6.3 uit [7]). Deze methode neemt het gemiddelde over de N meest recente waarden van x_t.

We voeren de volgende notatie in:
$\hat{a}_t$ = schatting van a nadat de vraag in periode t bekend is.

Dan:

$$\hat{a}_t = \frac{(x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + ... + x_{t-N+1})}{N},$$

hierbij is $\hat{a}_t$ de voorspelde gemiddelde vraag voor iedere periode. Voor iedere $\tau > t$ geldt dat $\hat{a}_\tau = \hat{a}_t$, omdat het onderliggende model het constante model is. De waarde van N is afhankelijk van de veranderingen in a en van de grote van de standaard deviatie van ε_t.

Voorbeeld

Stel we hebben de volgende data:

periode	x_t
1	5
2	6
3	4
4	7
5	5
6	5
7	6
8	4
9	4
10	4

We kiezen $N = 10$.
We willen de vraag voor periode 11 voorspellen.
De standaard deviatie van de werkelijke vraag over de afgelopen 10 perioden is gelijk aan $\sigma_{11} \approx 1.054$, dus $\varepsilon_{11} = \mathcal{N}(0, 1.054)$. De geschatte waarde van a is gelijk aan:

$$\hat{a}_{10} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10})}{10} = 5,$$

de voorspelling van de vraag in periode 11 is gelijk aan $\hat{a}_{10} = 5$, dit geeft het volgende model:

$$x_{11} = max(0, \hat{a}_{10} + \varepsilon_{11})$$

$$= max(0, 5 + \mathcal{N}(0, 1.054)).$$

Een 95% betrouwbaarheidsinterval voor de vraag is nu:

$$[max(0, 5 - 1.96 * 1.054); max(0, 5 + 1.96 * 1.054)]$$
$$= [2.9342; 7.0658]$$

We verwachten dus dat de vraag $a = 5$, en met 95% voorspellen we dat de vraag tussen $x = 3$ en $x = 7$ ligt.

3.5 Exponential smoothing

Bij exponential smoothing (Hoofdstuk 2.4 uit [1], Hoofdstuk 4.5.2 uit [5], Hoofdstuk 6.3 uit [7] en Hoofdstuk 8.5 uit [8]) wordt de vraag voor de nieuwe periode anders berekend dan bij het voortschrijdende gemiddelde. Ook hier wordt het constante model als onderliggend model beschouwd. De voorspelling van de vraag in periode t wordt berekend aan de hand van een lineaire combinatie van de vorige voorspelling en de meest recente geobserveerde vraag:

$$\hat{a}_t = (1 - \alpha)\hat{a}_{t-1} + \alpha x_t,$$

met α = smoothing constante ($0 < \alpha < 1$).

Door het constante model is de voorspelde vraag van de toekomstige perioden weer gelijk aan de voorspelde vraag van periode t. We kunnen de vraagvoorspelling herschrijven naar de volgende formule:

$$\begin{aligned} \hat{a}_t &= (1 - \alpha)\hat{a}_{t-1} + \alpha x_t \\ &= (1 - \alpha)((1 - \alpha)\hat{a}_{t-2} + \alpha x_{t-1}) + \alpha x_t \\ &= \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + (1 - \alpha)^2\hat{a}_{t-2} = \cdots \\ &= \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 x_{t-2} + ... + \alpha(1 - \alpha)^n x_{t-n} + (1 - \alpha)^{n+1}\hat{a}_{t-n-1}. \end{aligned}$$

Nu kunnen we deze vergelijken met de formule van het voortschrijdende gemiddelde.
Bij het voortschrijdende gemiddelde hebben alle N voorgaande periodes hetzelfde gewicht in de voorspelling van de vraag in periode t. Bij exponential smoothing echter, neemt het gewicht, bij iedere periode terug in de tijd, exponentieel snel af.
Als we bij het voortschrijdende gemiddelde N vergroten dan stellen we meer belang in het gebruik van oude data. Hetzelfde effect heeft het verkleinen van α bij exponential smoothing.
Bij het gebruik van het voortschrijdende gemiddelde houden we rekening met de werkelijke vraag van de perioden $t, t-1, t-2, ..t-N+1$. De oudheid van deze data is respectievelijk $0, 1, 2..N-1$ perioden. Alle gewichten van iedere periode is gelijk aan $\frac{1}{N}$. De gemiddelde oudheid is daarom $\frac{N-1}{2}$. Om de parameter N te vergelijken met de parameter α uit de exponential smoothing moeten we ook bij deze methode de gemiddelde oudheid bepalen.
Als we in:

$$\alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 x_{t-2} + ... + \alpha(1 - \alpha)^n x_{t-n} + (1 - \alpha)^{n+1}\hat{a}_{t-n-1}$$

de vraag x_t vervangen door de oudheid van de data, beginnende bij x_t heeft oudheid 0 dan krijgen we:

$$\alpha 0 + \alpha(1-\alpha)1 + \alpha(1-\alpha)^2 2 + ... + \alpha(1-\alpha)^n n + (1-\alpha)^{n+1}(n+1),$$

dit is een machtreeks.
Neem de machtreeks $S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$,
dan is $S'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$.
Als we de formule van exponential smoothing omschrijven krijgen we:

$$\alpha(1-\alpha)(1 + 2(1-\alpha) + 3(1-\alpha)^2 + ...),$$

dit is gelijk aan $\alpha(1-\alpha)S'(1-\alpha)$.
De machtreeks $S(x)$ convergeert naar $\frac{1}{1-x}$ voor $0 \leq x < 1$.
De machtreeks $S'(x) = 1+2x+3x^2+..... = 1+x+x^2+x^3+......+x(1+2x+3x^2+4x^3.....) = S(x) + xS'(x)$.
Dit impliceert $S'(x) = \frac{-S(x)}{x} = \frac{S(x)}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
Dus $\alpha(1-\alpha)S'(1-\alpha)$ convergeert naar $\alpha(1-\alpha)\frac{1}{(1-(1-\alpha))^2} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$.
Als we aannemen dat beide methoden dezelfde gemiddelde oudheid hebben dan moet:

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{N-1}{2}.$$

Dit is gelijk aan:

$$\alpha = \frac{2}{N+1}.$$

De conclusie is dus dat het voortschrijdende gemiddelde en de exponential smoothing methode dezelfde gemiddelde oudheid hebben indien de exponential smoothing methode de bovenstaande waarde voor α heeft.

In dit model is α de enige parameter die vrij gekozen kan worden. Als we α klein kiezen dan volgt het systeem minder snel de vraag, een voordeel echter is dat fluctuaties in de vraag geen grote invloed hebben op het model. Bij grote α is het systeem zeer flexibel en volgt het snel veranderingen op in de vraag. Echter ook grote fluctuaties worden gevolgd en dit is niet de bedoeling.
Men kan de waarde van α vaststellen met behulp van data. Als er data is over het artikel kan men deze opsplitsen in 2 groepen. Met de eerste initialiseert men het systeem en met de tweede groep kun je de optimale waarde van α berekenen aan de hand van een gegeven optimaliteitsfunctie, bijvoorbeeld de kleinste kwadratische fout.

Voorbeeld

Stel we hebben de volgende data:

periode	x_t
1	15
2	10
3	13
4	7
5	25
6	15
7	16
8	9
9	20
10	8

en we gebruiken de volgende formule:

$$\hat{a}_t = (1 - \alpha)\hat{a}_{t-1} + \alpha x_t,$$

dan krijgen we voor $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.7$ en $\hat{a}_0 = x_1$ de volgende uitkomsten:

		α_1	α_2
t	x_t	$\hat{a}_t$	$\hat{a}_t$
1	15	15	15
2	10	15	12
3	13	15	13
4	7	14	9
5	25	15	20
6	15	15	17
7	16	15	16
8	9	14	11
9	20	15	17
10	8	14	11

Stel we willen de vraag voor periode 11 voorspellen.
De standaard deviatie van de werkelijke vraag over de afgelopen 10 perioden is gelijk aan $\sigma_{11} \approx 5.673$, dus $\varepsilon_{11} = \mathcal{N}(0, 5.673)$.
Het model voor de vraag van periode 11 met behulp van α_1 is nu:

$$x_{11} = max(0, \hat{a}_{10} + \varepsilon_{11}) = max(0, 14 + \mathcal{N}(0, 5.673)).$$

Een 95% betrouwbaarheidsinterval voor de vraag is nu:

$$[max(0, 14 - 1.96 * 5.673); max(0, 14 + 1.96 * 5.673)] = [2.8811; 25.1189]$$

We verwachten dus dat de vraag $a = 14$, en met 95% voorspellen we dat de vraag tussen $x = 3$ en $x = 25$ ligt.
De voorspelde vraag voor periode 11 met behulp van α_2 is:

$$x_{11} = max(0, \hat{a}_{10} + \varepsilon_{11}) = max(0, 11 + \mathcal{N}(0, 5.673)).$$

Een 95% betrouwbaarheidsinterval voor de vraag is nu:

$$[max(0, 11 - 1.96 * 5.673); max(0, 11 + 1.96 * 5.673)] = [0; 22.1189]$$

We verwachten dus dat de vraag $a = 11$, en met 95% voorspellen we dat de vraag tussen $x = 0$ en $x = 22$ ligt.

Als we de standaard deviatie van $\hat{a}_t$ over de afgelopen 10 perioden berekenen krijgen we:

α	standaard deviatie van $\hat{a}_t$
0.1	0.48
0.7	3.45

We zien dat bij grotere waarden voor α de standaard deviatie over de geschatte gemiddelde vraag groter is dan bij kleinere waarde van α. Dit betekent dat de geschatte gemiddelde vraag voor grotere α meer fluctueert.

3.6 Exponential smoothing met trend

Exponential smoothing met trend (Hoofdstuk 2.5 uit [1] en Hoofdstuk 4.5.3 uit [5]) heeft als onderliggende model het trend model. In dit model moeten echter 2 parameters geschat worden, namelijk a en b. De volgende schattingen voor a en b worden gehandhaafd bij exponential smoothing met trend:

$$\hat{a}_t = (1 - \alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}) + \alpha x_t,$$
$$\hat{b}_t = (1 - \beta)\hat{b}_{t-1} + \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}),$$

met α en β smoothing constanten tussen 0 en 1.
De gemiddelde $\hat{a}_t$ hoort bij periode t, dit is de periode voor welke we de vraag al weten. De voorspelling van een toekomstige periode, $t + k$, wordt als volgt berekend:

$$\hat{x}_{t,t+k} = max(0, \hat{a}_t + k\hat{b}_t + \varepsilon_{t+k}).$$

Het belangrijkste verschil tussen exponential smoothing en exponential smoothing met trend is, dat nu de voorspelling van volgende perioden niet meer steeds hetzelfde zijn. De trend kan per periode veranderen en kan ook negatief zijn.
Het idee achter exponential smoothing met trend is dat de voorspelling lineaire veranderingen in de vraag beter kan volgen. Grotere waarden voor α en β zullen het systeem sneller laten reageren op veranderingen maar tevens zal het gevoeliger zijn voor fluctuaties in de vraag.

Voorbeeld

Stel we hebben de volgende data:

periode	x_t
1	15
2	10
3	13
4	7
5	25
6	15
7	16
8	9
9	20
10	8

en we gebruiken de volgende formules:

$$\hat{a}_t = (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}) + \alpha x_t,$$
$$\hat{b}_t = (1-\beta)\hat{b}_{t-1} + \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}),$$

dan krijgen we voor $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.7$, $\beta_1 = 0.01$, $\beta_2 = 0.8$, $\hat{a}_0 = x_1$ en $\hat{b}_0 = 0$ de volgende uitkomsten:

		α_1 en β_1		α_1 en β_2		α_2 en β_1		α_2 en β_2	
t	x_t	$\hat{a}_t$	$\hat{b}_t$	$\hat{a}_t$	$\hat{b}_t$	$\hat{a}_t$	$\hat{b}_t$	$\hat{a}_t$	$\hat{b}_t$
0		15.00	0.00	15.00	0.00	15.00	0.00	15.00	0.00
1	15	15.00	0.00	15.00	0.00	15.00	0.00	15.00	0.00
2	10	14.50	-0.01	14.50	-0.40	11.50	-0.04	11.50	-2.80
3	13	14.35	-0.01	13.99	-0.49	12.54	-0.02	11.71	-0.39
4	7	13.61	-0.01	12.85	-1.01	8.65	-0.06	8.30	-2.81
5	25	14.73	0.00	13.16	0.04	20.08	0.05	19.15	8.12
6	15	14.76	0.00	13.38	0.19	16.54	0.02	18.68	1.25
7	16	14.88	0.00	13.81	0.38	16.17	0.01	17.18	-0.95
8	9	14.29	-0.01	13.68	-0.03	11.15	-0.04	11.17	-5.00
9	20	14.86	0.00	14.28	0.48	17.33	0.02	15.85	2.75
10	8	14.17	-0.01	14.08	-0.07	10.81	-0.04	11.18	-3.19

Stel we willen de vraag voor periode 11 voorspellen.
De standaard deviatie van de werkelijke vraag over de afgelopen 10 perioden is gelijk aan $\sigma_{11} \approx 5.673$, dus $\varepsilon_{11} = \mathcal{N}(0, 5.673)$.
Het model voor de vraag van periode 11 is nu:

$$x_{10,11} = max(0, \hat{a}_{10} + \hat{b}_{10} + \varepsilon_{11}),$$

voor iedere combinatie van α en β kunnen we de verwachte vraag voor periode 11 aflezen uit de tabel. Een 95% betrouwbaarheidsinterval voor de vraag is nu:

$$[max(0, \hat{a}_{10} + \hat{b}_{10} - 1.96 * 5.673); max(0, \hat{a}_{10} + \hat{b}_{10} + 1.96 * 5.673)]$$
$$= [\hat{a}_{10} + \hat{b}_{10} - 11.119; \hat{a}_{10} + \hat{b}_{10} + 11.119]$$

Als we de standaard deviatie van $\hat{a}_t$ en $\hat{b}_t$ over de afgelopen 10 perioden berekenen krijgen we:

α	β	standaard deviatie van $\hat{a}_t$	standaard deviatie van $\hat{b}_t$
0.1	0.01	0.424	0.004
0.1	0.8	0.643	0.441
0.7	0.01	3.581	0.036
0.7	0.8	3.695	3.742

We zien dat bij grotere waarden voor α de standaard deviatie over de geschatte gemiddelde vraag groter is dan bij kleinere waarde van α. Dit betekend dat de de geschatte gemiddelde vraag voor grotere α meer fluctueert. Ook zien we dat de standaard deviatie over de geschatte trendparameter meer fluctueert bij grotere waarde van β.

3.7 Winters' trend seizoen model

Het onderliggende model voor Winters' model (Hoofdstuk 2.6 uit [1] en Hoofdstuk 4.5 uit [5]) is het trend seizoen model. Het trend seizoen model wordt meestal gebruikt voor artikelen die een zeer duidelijke vraagverandering hebben in een bepaald seizoen, zoals kerst artikelen. Winters' trend seizoen model kan worden gezien als een generalisatie van het exponential smoothing model met trend.
Eerst gaan we de formule uit het trend seizoen model omschrijven:

$$x_t = max(0, (a + bt)F_t + \varepsilon_t),$$
$$\frac{x_t}{F_t} = max(0, (a + bt) + \frac{\varepsilon_t}{F_t}),$$

maar $\frac{\varepsilon_t}{F_t}$ is nog steeds een normale verdeling met verwachting 0, alleen is nu de standaard deviatie veranderd. We herschrijven $\frac{\varepsilon_t}{F_t}$ naar ε_t. Dan krijgen we:

$$\frac{x_t}{F_t} = max(0, (a + bt) + \varepsilon_t),$$

nu is $\frac{x_t}{F_t}$ de vraag zonder seizoen fluctuaties.

Het herberekenen van a en b doen we op dezelfde manier als bij het exponential smoothing model met trend. Alleen vervangen we nu x_t door $\frac{x_t}{F_t}$. We krijgen nu:

$$\hat{a}_t = (1 - \alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}) + \alpha\frac{x_t}{F_t},$$
$$\hat{b}_t = (1 - \beta)\hat{b}_{t-1} + \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}).$$

Alleen de seizoen index moet nu nog herberekend worden.
Allereerst:

$$\hat{F'}_t = (1 - \gamma)\hat{F}_t + \gamma\frac{x_t}{\hat{a}_t}$$

en:

$$\hat{F'}_{t-i} = \hat{F}_{t-i} \text{ voor i = 1,2,....,T-1,}$$

met smoothing constante $0 < \gamma < 1$. Met $\hat{F}'_{t-i} = \hat{F}_{t-i}$ bedoelen we dat alleen de index $t-i$ wordt herberekend en dat de overige indices hetzelfde blijven. In het trend seizoen model wordt geëist dat:

$$\sum_{k=1}^{T} F_{t+k} = T$$

en:

$$F_{t+T} = F_t,$$

dit geld ook voor Winters' model. Dit betekent dat we de nieuwe waarden voor F_t moeten normaliseren op de volgende manier:

$$\hat{F}_{t-i} = \hat{F}'_{t-i} \frac{T}{\sum_{k=0}^{T-1} F'_{t-k}} \text{ voor i = 0,1, ..., T-1.}$$

De berekende indices worden gebruikt voor de vraagvoorspelling van toekomstige perioden, totdat de indices opnieuw worden berekend. Dit betekent:

$$\hat{F}_{t-i+kT} = \hat{F}_{t-i} \text{ voor i = 0,1, ..., T-1 en k = 1, 2, ...,}$$

dus de voorspelling voor periode $t+k$ kan als volgt worden berekend:

$$\hat{x}_{t,t+k} = max(0, (\hat{a}_t + k\hat{b}_t)\hat{F}_{t+k}).$$

Bij gebruik van dit model worden de seizoensindices steeds opnieuw berekend. Het is echter lastig om onderscheid te maken tussen seizoensinvloeden en fluctuaties in de vraag. Hierdoor worden de indices minder betrouwbaar. Een manier om indices betrouwbaarder te maken is door in plaats van naar een artikel te kijken, een groep gelijkwaardige artikelen te vergelijken om zo seizoensinvloeden vast te stellen.

Voorbeeld

We gebruiken de data uit het voorbeeld van hoofdstuk 3.6.
We kiezen $\gamma_1 = 0.01$, $\gamma_2 = 0.9$ en $F_0 = 1$ dan krijgen we voor $\alpha = 0.1$ en $\beta = 0.01$:

				γ_1	γ_2
t	x_t	$\hat{a}_t$	$\hat{b}_t$	$\hat{F}_t$	$\hat{F}_t$
0		15.00	0.00	1.00	1.00
1	15	15.00	0.00	1.00	1.00
2	10	14.50	-0.01	1.00	0.72
3	13	14.35	-0.01	1.00	0.89
4	7	13.61	-0.01	0.99	0.55
5	25	14.76	0.00	1.00	1.58
6	15	14.79	0.00	1.00	1.07
7	16	14.91	0.00	1.00	1.07
8	9	14.32	-0.01	1.00	0.67
9	20	14.89	0.00	1.00	1.28
10	8	14.20	-0.01	0.99	0.63

Stel we willen de vraag voor periode 11 voorspellen.
De standaard deviatie van de werkelijke vraag over de afgelopen 10 perioden is gelijk aan $\sigma_{11} \approx 5.673$, dus $\varepsilon_{11} = \mathcal{N}(0, 5.673)$.
Het model voor de vraag voor periode 11 is nu:

$$x_{10,11} = max(0, (\hat{a}_{10} + \hat{b}_{10})\hat{F}_{10} + \varepsilon_{11}).$$

Voor γ_1 krijgen we:

$$[max(0, (14.20-0.01)0.99-1.96*5.673); max(0, (14.20-0.01)0.99+1.96*5.673)] = [2.9292; 25.1670]$$

We verwachten dus dat de vraag $a = 14$, en met 95% voorspellen we dat de vraag tussen $x = 3$ en $x = 25$ ligt.
Voor γ_2 krijgen we:

$$[max(0, (14.20-0.01)0.63-1.96*5.673); max(0, (14.20-0.01)0.63+1.96*5.673)] = [0; 20.0586]$$

We verwachten dus dat de vraag $a = 9$, en met 95% voorspellen we dat de vraag tussen $x = 0$ en $x = 20$ ligt.

Als we de standaard deviatie van $\hat{F}_t$ over de afgelopen 10 perioden berekenen krijgen we:

γ	standaard deviatie van $\hat{F}_t$
0.01	0.003
0.9	0.321

We zien dat bij grotere waarden voor γ de standaard deviatie over de geschatte gemiddelde vraag groter is dan bij kleinere waarde van γ. Dit betekent dat de geschatte gemiddelde vraag voor grotere γ meer fluctueert.

4 Voorspellingsfouten

Het berekenen van de voorspellingsfouten (Hoofdstuk 2.8 uit [1] en Hoofdstuk 4.3.3.1 uit [2]) geeft een uitdrukking aan de onzekerheid in de vraag. Bij het voorspellen van de vraag wordt het gemiddelde van de vraag voorspeld.
De meest gebruikelijke manier om de onzekerheid van de vraag uit te drukken is door middel van de standaard deviatie van de vraag te schatten.
Als X een stochastische variabele is met verwachting m = $\mathbb{E}$(X), dan wordt de standaard deviatie als volgt gedefinieerd:

$$\sigma_t = \sqrt{\mathbb{E}(X_t - m)^2} = \sqrt{(MSE)_t},$$

hierbij staat σ^2 bekend als de variantie.
Bij het berekenen van de voorspellingsfouten is het niet gebruikelijk rechtstreeks σ te berekenen. In plaats daarvan wordt de Mean Squared Error (MSE), de verwachte kwadratische fout, berekent. De MSE wordt als volgt berekend:

$$MSE_t = \mathbb{E}_{\hat{x}_t}|x_t - \hat{x}_t|^2 = \mathbb{V}ar_{\hat{x}_t} x_t + |\mathbb{E}_{\hat{x}_t} x_t - \hat{x}_t|^2,$$

hierbij is $\hat{x}_t$ de voorspelde waarde en x_t de werkelijke waarde van de vraag.
Een veelgemaakte aanname is dat de voorspellingsfouten normaal verdeeld zijn (zie pagina 170 uit [2]). Dit is vaak het geval in de productie. In de retail echter zijn de voorspellingsfouten vaak exponentieel verdeeld (volgens pagina 170 uit [2]).
Ook de MSE wordt iedere periode herberekend. Omdat een veel gemaakte aanname is dat de MSE schommelt rond een bepaald vast punt (pagina 171 uit [2]), kan men exponential smoothing gebruiken om de MSE per periode opnieuw te berekenen.
Dit gaat als volgt:

$$(MSE)_t = \alpha_k E_{t-1}^2 + (1 - \alpha_k)(MSE)_{t-1},$$

met:
α_k een smoothing constante gerelateerd aan het gebruikte voorspellingsmodel; $(MSE)_t$, de verwachte kwadratische fout voor periode t, deze wordt berekent aan het eind van periode $t-1$;
E_{t-1} de huidige voorspellingsfout van periode $t-1$, deze wordt als volgt berekend:

$$E_t = \hat{x}_t - x_t \text{ waarbij } \hat{x}_t \text{ de voorspelde vraag is en } x_t \text{ de werkelijke vraag.}$$

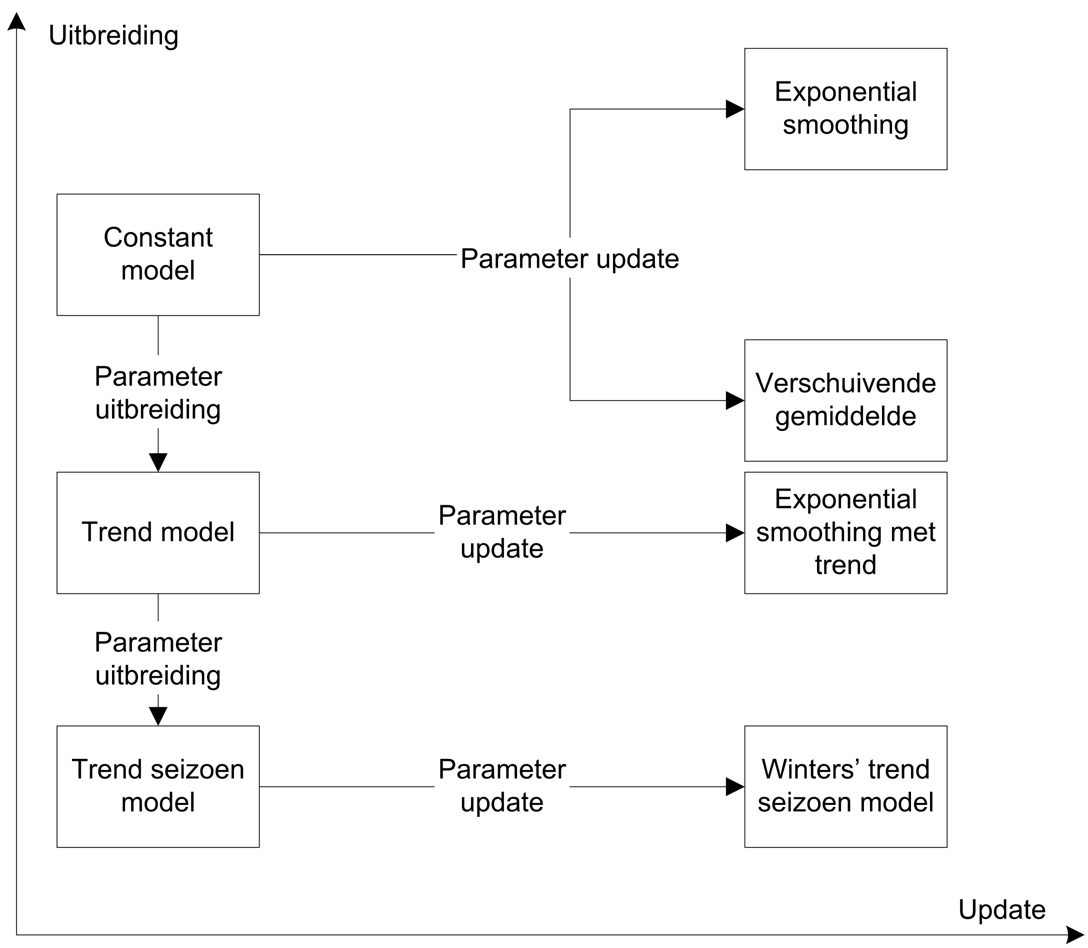
Vroeger berekende men de waarde van σ aan de hand van de mean absolute deviation, de MAD. Dit vanwege de rekencapaciteiten van computers. Het berekenen van de MSE vergt meer computertijd daarom gebruikte men de MAD en berekende de σ als volgt:

$$\sigma = 1.25MAD.$$

Als de voorspellingsfouten normaal verdeeld zijn is dit een goede benadering van σ. Echter in de retail worden voorspellingsfouten vaak exponentieel benadert.
Vanwege de toegenomen rekencapaciteit van computers kan men tegenwoordig ook eenvoudig de MSE berekenen. Deze waarde is preciezer dan de MAD vooral bij niet normaal verdeelde voorspellingsfouten, en dit geniet dus de voorkeur.

5 Conclusie

De modellen omschreven in de theorie kunnen we als volgt samenvatten:
Het constante model is het basis model, de gemmiddelde vraag van het constante model kun je schatten met behulp van het voortschrijdende gemiddelde model of het exponential smoothing model.
Een uitbreiding van het constante model is het trend model. Het schatten van de gebruikte parameters wordt besproken in het exponential smoothing model.
Het meest uitgebreide model is het trend seizoen model. Het schatten van de gebruikte parameters van dit model wordt besproken in het Winters' trend seizoen model.
Grafische weergegeven ziet dit er als volgt uit:



In de retail heb je te maken met seizoensinvloeden bij bepaalde artikelen. Men wil echter graag een model voor alle artikelen gebruiken. Dit zou dan het Winters' trend seizoen model zijn. Bij de meeste artikelen zal dan F_t gelijk aan 1 zijn. Van een lineaire trend zal bij zeer weinig artikelen sprake zijn. Het gros van de artikelen zal dus een waarde van $b = 0$ hebben. Dit reduceert het model tot een constant model met als update exponential smoothing.

6 Samenvatting

In dit deel heb ik methoden besproken om een puntschatting van de vraag te maken. Hierbij wordt aangenomen dat de vraag naar artikelen onafhankelijk van elkaar zijn.

Het constante model is een model dat aanneemt dat de gemiddelde vraag in verschillende perioden nagenoeg constant is. De voorspelde vraag voor periode t wordt geschat met:

$$x_t = max(0, a + \varepsilon_t),$$

met x_t de voorspelde vraag, a de gemiddelde vraag en ε_t een random trekking uit de $\mathcal{N}(0, \sigma)$ verdeling met σ de standaart deviatie van de werkelijke vraag over de afgelopen i perioden. Het schatten van de gemiddelde vraag, a, kan op twee manieren gebeuren; op basis van het voortschrijdend gemiddelde en op basis van exponential smoothing. Bij het voortschrijdend gemiddelde wordt a geschat door $\hat{a}_t$ het gemiddelde van de werkelijke vraag over de afgelopen N perioden. Bij exponential smoothing wordt a geschat door $\hat{a}_t = (1 - \alpha)\hat{a}_{t-1} + \alpha x_t$. De geschatte a voor periode $t + 1$ is nu $\hat{a}_{t+1} = \hat{a}_t$. De α heet de smoothing constante en heeft een waarde tussen 0 en 1 afhankelijk van de gewenste responsiviteit van het model.

Het trend model neemt aan de dat de gemiddelde vraag in verschillende perioden lineair stijgt of daalt. Dit lineaire verband heet de trend. De voorspelde vraag voor periode t wordt geschat met:

$$x_t = max(0, a + bt + \varepsilon_t),$$

met b de lineaire trend parameter. Het schatten van de gemiddelde vraag, a, en de lineaire trend, b wordt op basis van een exponential smoothing model gedaan. Hierbij wordt a voor periode $t+1$ geschat door $\hat{a}_{t+1} = \hat{a}_t = (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}) + \alpha x_t$ en b voor periode $t+1$ door $\hat{b}_{t+1} = \hat{b}_t = (1-\beta)\hat{b}_{t-1} + \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1})$, α en β zijn hierbij smoothing constanten. De voorspelde vraag voor periode $t+1$ is nu $\hat{x}_{t,t+1} = \hat{a}_t + \hat{b}_t + \varepsilon_{t+1}$, we vermenigvuldigen de trend parameter niet met $t+1$ omdat we de a steeds opnieuw schatten en dus eigenlijk $t = t+1-t = 1$ periode verder kijken.

Het trend - seizoen model houdt ook rekening met producten die in een bepaald seizoen meer verkopen dan in andere seizoenen. De vraag wordt voorspeld met:

$$x_t = max(0, (a + bt)F_t + \varepsilon_t),$$

met F_t de seizoensindex in periode t. Het statten van de gemiddelde vraag, a, de lineaire trend, b en de seizoensindex, F_t wordt op basis van een exponential smoothing model gedaan. Hierbij wordt a voor periode $t + 1$ geschat door $\hat{a}_{t+1} = \hat{a}_t = (1 - \alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}) + \alpha\frac{x_t}{F_t}$, b voor periode $t + 1$ door $\hat{b}_{t+1} = \hat{b}_t = (1 - \beta)\hat{b}_{t-1} + \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1})$ en $\hat{F'}_t = (1 - \gamma)\hat{F}_t + \gamma\frac{x_t}{\hat{a}_t}$. De α, β en γ zijn hierbij smoothing constanten. De voorspelde vraag voor periode $t + 1$ is nu $\hat{x}_{t,t+1} = (\hat{a}_t + \hat{b}_t)\hat{F}_{t+1}$.

Door het berekenen van de voorspellingsfouten kunnen we een uitdrukking geven aan de onzekerheid van de vraag. In de retail wordt aangenomen dat de voorspellingsfouten exponentieel verdeeld zijn. We verwachten dat de voorspellingsfout in periode t gelijk is aan:

$$(MSE)_t = \alpha_k E_{t-1}^2 + (1 - \alpha_k)(MSE)_{t-1},$$

hierbij is α_k een smoothing constante gerelateerd aan het voorspellingsmodel. De E_t wordt als volgt berekend, $E_t = \hat{x}_t - x_t$, de voorspelde vraag min de werkelijke vraag.

Deel II

Bestelregels

7 Inleiding

We nemen aan dat in de retail iedere dag goederen worden geleverd rond hetzelfde tijdstip en dat de levertijd minder dan 1 dag is. Dit betekent dat we iedere dag bestellen. De voorraad na levering in de winkels moet dus voldoende zijn voor 1 dag. Om de optimale bestelregels te bepalen moeten we eerst een aantal eigenschappen van de artikelen vaststellen.
We bekijken de artikelen van de kruidenierswaren bij Albert Heijn.

7.1 Besteleenheden

In de retail kun je niet zelf bepalen hoeveel artikelen je bestelt. Bestellen gebeurt in besteleenheden ook wel collo genoemd. Als je een artikel bestelt, bestel je een besteleenheid, dit is dus een vast aantal artikelen. Je kunt wel kiezen hoeveel besteleenheden je per keer bestelt.

7.2 Levertijden

De levertijden in de retail zijn getallen in een bepaald interval. Deze kunnen we benaderen met een vaste levertijd. Voor iedere vrachtwagen is gegeven hoe laat deze ongeveer moet komen. De daadwerkelijke aankomsttijd van de vrachtwagen mag tot een kwartier voor of na deze tijd liggen. De levertijd is afhankelijk per winkel. Als bijvoorbeeld de vrachtwagen om 16.00 hoort te komen dan is 22.00 het bestelmoment. De levertijd is dan alle uren dat de winkel open is van 22.00 tot 16.00. Dit is 8 uur voor dagen dat de winkel tot 20.00 open is. Als de vrachtwagen om 7.00 komt dan is het bestelmoment 13.00 en dus de levertijd 7 uur.

7.3 Houdbaarheidsdata

Het gros van de artikelen van de afdeling kruidenierswaren hebben een lange houdbaarheidsdatum (> 1 jaar). Deze artikelen kunnen we benaderen als artikelen met een onbeperkte houdbaarheid. Als de omloopsnelheid van een besteleenheid langer dan een jaar zou zijn, dan zou de winkel beslissen het artikel niet te verkopen. De overige artikelen die een houdbaarheid korter dan 1 jaar hebben kunnen we ook benaderen met een onbeperkte houdbaarheid. Dit is weer omdat als de artikelen een omloopsnelheid van een besteleenheid hebben die korter is dan de houdbaarheidsdata de winkel zou besluiten het artikel niet te verkopen.

7.4 Nee-verkopen

Als de voorraad van een artikel op 0 komt voor het leveren van het artikel dan kan het zijn dat een gedeelte van de vraag van die dag verloren gaat. Hieraan zijn kosten verbonden. Voor alle artikelen geldt dat de vraag verloren gaat als de voorraad 0 is. Er wordt dus niets nageleverd.

De voorbeelden gegeven in dit deel van het werkstuk zijn gebasseerd op zelf bedachte data die niet representatief zijn voor de praktijk.

8 Voorraadmodellen

Er is veel literatuur over voorraadmodellen. Ook zijn er heel veel verschillende soorten voorraadmodellen. Al deze voorraadmodellen hebben een aantal eigenschappen gemeen:

- Het doel is het minimaliseren van de kosten.
- De uitkomst is een optimale bestelhoeveelheid.

De optimale bestelhoeveelheid wordt gegeven in discrete aantallen artikelen, om dit aan te passen voor de retail, waar in vaste besteleenheden word besteld, moet je dit afronden naar de dichtstbijzijnde besteleenheid met minimale kosten.
Om de optimale strategie te bepalen moeten we eerst een aantal eigenschappen van artikelen in de retail vaststellen:

- De vraag is onzeker, de voorspelling van de vraag op basis van historische data is bekend. De exacte waarde is niet bekend.
- De retail houdt rekening met vaste bestelkosten, voorraadkosten en nee-verkoopkosten.
- De levertijd is vast.
- Er wordt op een vast tijdstip besteld en op basis van de gegevens over de artikelen tot aan dat tijdstip (bijvoorbeeld voorraadstanden).

Van de vaste bestelkosten kunnen we aannemen dat deze laag zullen zijn, omdat iedere dag er toch een levering plaats vind. Een voorbeeld van de hoogte van de vaste bestelkosten zijn de kosten van het order picken op het distributiecentrum van het artikel.
De beslissing om wel of niet te bestellen is afhankelijk van het voorraad-niveau op het tijdstip van bestellen en de vraag. In de literatuur (Hoofdstuk 4.5.4 uit [2]) zijn er modellen over de optimale voorraadniveau bij bestelling. Deze modellen staan bekend als de (R, Q) of (R, nQ) modellen. Hierbij staat R voor het bestelpunt en Q voor de besteleenheid. De n is het aantal keer dat je de besteleenheid bestelt.

9 De vraag

Het berekenen van het optimale bestelpunt is onder andere afhankelijk van de vraag. De vraag is onzeker. Dit wordt in de theorie aangeduid als een stochastische vraag.
Een veel gemaakte aanname in de literatuur (Hoofdstuk 6.2 uit [3]) is dat de vraag een Poisson verdeling heeft.

We definiëren de volgende variabelen:
λ = verwachte vraag per tijdseenheid,
L = de levertijd,
Q = de besteleenheid,
R = het bestelpunt,
t = de tijd variabele (continu).

Voor iedere $t \geq 0$, definiëren we:
$D(t)$ = De totale vraag in het tijdsinterval van 0 tot t.
$D(t, u]$ = De totale vraag in periode $(t, u] = D(u) - D(t)$, $u \geq t$.

D heeft een Poisson verdeling met verwachting λ. Dit betekent dat de kans dat er een vraag is in een kort tijdsinterval Δt ongeveer gelijk is aan $\lambda \Delta t$, onafhankelijk van andere tijdsintervallen. We negeren de kans dat een interval meer dan 1 keer een vraagmoment kan hebben. Nu kunnen we de verdeling van $D(t)$ vaststellen:

$$\mathbb{P}(D(t) = d) = \frac{(\lambda t)^d}{d!} e^{-\lambda t} \ , \ d \geq 0.$$

Ook $D(t, u]$ heeft een Poisson verdeling met verwachting $\lambda(u - t)$, de verwachting is afhankelijk van de lengte van de tijdsinterval, niet van de locatie. $D(t)$ en $D(t, u]$ zijn onafhankelijk.

We nemen voor λ de voorspelde vraag berekend met een van de methodes beschreven in het vorige deel.

10 De nee-verkopen

Het voorraadniveau voor het nemen van de beslissing betreffende het wanneer bestellen is ook afhankelijk van de gewenste service level voor nee-verkopen of de kosten van nee-verkopen.

10.1 Service levels

Het gebruik van gewenste service levels is in praktijk makkelijker te implementeren dan kosten voor nee-verkopen.
Er zijn 3 definities voor service levels (Hoofdstuk 3.4.3 uit [1] en Hoofdstuk 4.4 uit [4]).

- S_1 = Het percentage van de keren dat er geen nee-verkopen zijn gedurende de tijd tussen 2 leveringen.
- S_2 = Het percentage van de vraag dat kan worden voldaan uit de voorraad = 100 - percentage nee-verkopen.
- S_3 = Het percentage tijd dat de voorraad > 0.

De eerste definitie kan worden gezien als het percentage van de leveringen dat op tijd aankomt, dat wil zeggen voordat de voorraad 0 wordt. Deze definitie is gemakkelijk te gebruiken maar heeft een aantal nadelen. De belangrijkste is dat de definitie geen rekening houdt met de grootte van besteleenheden.
De tweede en derde definitie maken de berekening van het bestelpunt complexer, maar geven aan de andere kant een beter beeld van het service level.
In de retail zal vaak de voorkeur worden gegeven aan de tweede definitie. Er wordt gedacht vanuit de klant. De tijd dat de voorraad groter is dan 0 is minder belangrijk dan het aantal klanten die het artikel willen kopen en een leeg schap aantreffen.

10.2 De kosten van nee-verkopen

Een alternatief voor het gebruik van service levels is het gebruik van nee-verkoop kosten. Er zijn 2 soorten kosten van nee-verkopen (Hoofdstuk 3.4.4 uit [1]):

- b_1 = De kosten van nee-verkopen per artikel en per tijdseenheid.
- b_2 = De kosten van nee-verkopen per artikel.

De kosten van nee-verkopen per artikel en per tijdseenheid betekend dat net voor de levering nee-verkopen minder kost dan een dag voor levering nee-verkopen.
Het nadeel van gebruik maken van kosten van nee-verkopen is dat in praktijk blijkt dat de hoogte van de kosten moeilijk is vast te stellen. Een voordeel is dat bij gebruik van deze kosten een goede verhouding berekend kan worden tussen voorraad- en kosten van nee-verkopen en daaruit het service level kan worden berekend.
In de retail zal gebruik worden gemaakt van de tweede definitie van de kosten. Weer wordt er gedacht vanuit de klant, de klant komt meestal maar 1 keer om een artikel te kopen. Is het er niet dan zal de klant het ergens anders kopen. De tijd dat er nee-verkopen zijn is dus niet van belang.

11 De bestelstrategie

Voor het bepalen van een bestelstrategie declareren we de volgende variabelen:
K = de vaste bestelkosten,
h = de voorraadkosten per tijdseenheid per artikel,
L = de levertijd,
D = verdeling van de vraag, deze is Poisson verdeeld,
Q = de grote van een besteleenheid,
x_t = voorraad op tijdstip t, waarbij t een bestelmoment is.

Van de vaste bestelkosten hebben we in de inleiding aangenomen dat deze laag zullen zijn. Dit zullen we verder specificeren naar zo laag dat het aanhouden van een voorraad van een besteleenheid extra hoger is dan de vaste bestelkosten. Dit betekent dat er de minimale benodigde hoeveelheid besteld zal worden.
We definiëren tijdseenheid als het aantal uur op een dag dat de winkel open is. Bijvoorbeeld 1 tijdseenheid is 12 uur als de winkel van 8.00 tot 20.00 open is. Als de levertijd 7 uur is dan wordt $L = \frac{7}{12}$.

12 De bestelstrategie met gebruik van een service level

Voor het bepalen van de optimale bestelstrategie moeten we een afweging maken tussen de kosten en het geëiste service level.
Het geëiste service level noteren we met SL en drukt het percentage van de vraag uit waaraan meteen moet kunnen worden voldaan.
Omdat we aannemen dat de vaste bestelkosten laag zijn weten we dat de kosten functie een stijgende functie is. Het optimale bestelpunt zonder service level zal dus 0 zijn. De service level eis is dus een restrictie op het bestelpunt. We gebruiken in de berekening de tweede definitie van een service level; het percentage van de vraag dat kan worden voldaan uit de voorraad.
Er hoeft niet besteld te worden als geldt (Hoofdstuk 7.9 uit [7]):

$$\mathbb{P}(D(Z) > x_t) \leq 1 - SL,$$

met $Z = L + 1$, de levertijd L plus 1 dag. Dit betekent dat als er niet besteld wordt, de voorraad op tijdstip t groter moet zijn dan de kans dat de vraag groter is, in de periode tot de volgende mogelijke levering dan de service level restrictie.

Dit kunnen we herschrijven naar:

$$1 - \mathbb{P}(D(L+1) \leq x_t) \leq 1 - SL \Longleftrightarrow \mathbb{P}(D(L+1) \leq x_t) \geq SL.$$

Als dit niet het geval is zal er op tijdstip t een of meer besteleenheden besteld moeten worden. Het aantal besteleenheden dat zal worden besteld is het minimale aantal waarbij aan de service level restrictie wordt voldaan.
Als er wordt besteld zal dit na L tijdseenheden geleverd worden, dit betekend dat we de vraag moeten opsplitsen in de vraag tot de levering en de vraag na de levering tot de volgende mogelijke levering (dit is 1 dag):

$$\mathbb{P}(D(L) + D(1) \leq x_t + aQ) \geq SL,$$

met a het aantal bestelde eenheden. Dit kunnen we wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen herschrijven naar:

$$\sum_{i=0}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{min(i,x_t)} \mathbb{P}(D(L) = j)\mathbb{P}(D(1) = i - j) \geq SL,$$

hierbij moeten we wel eisen dat j niet groter kan worden dan x_t, want tijdens de levertijd heb je x_t artikelen om te verkopen.

13 Een Poisson verdeelde vraag een vaste λ

13.1 Wanneer niet bestellen

Als de vraag Poisson verdeeld is hoeven we niet te bestellen als:

$$SL \leq \mathbb{P}(D(L+1) \leq x_t) = \sum_{i=0}^{x_t} \mathbb{P}(D(L+1) = i) = \sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda(L+1))^i}{i!} e^{-\lambda(L+1)}.$$

Voorbeeld

We nemen aan:

- $\lambda = 5$.
- De levertijd is 7 uur en de winkel is 12 uur per dag open; $L = \frac{7}{12}$.
- De besteleenheid bedraagt 6 consumenten eenheden.
- De service level eis bedraagt 95%.

Dan krijgen we:

$$\lambda(L+1) = 5 * (1 + \frac{7}{12}) \approx 7.92.$$

Gegeven de voorraad kunnen we berekenen of we moeten bestellen of niet.

x_t	$\mathbb{P}(D(L+1) \leq x_t)$	Bestellen?
15	0.9925	Nee
14	0.9841	Nee
13	0.9682	Nee
12	0.9401	Ja

Als $\mathbb{P}(D(L+1) \leq x_t) \geq SL$ dan hoeven we niet te bestellen. Uit de tabel is af te lezen dat we bij een voorraad van $x_t = 12$ of minder moeten gaan bestellen.

13.2 Hoeveel te bestellen

Als er bij niet bestellen niet aan de service level eis wordt voldaan zal er op tijdstip t een of meer besteleenheden moeten worden besteld. Het aantal besteleenheden dat zal worden besteld (a) is de minimale waarde van a waarvoor geldt:

$$\sum_{i=0}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{min(i,x_t)} \mathbb{P}(D(L)=j)\mathbb{P}(D(1)=i-j) \geq SL.$$

De tweede sommatie kunnen we opsplitsen in 2 delen. Het minimum tussen i en x_t is i zolang $i \leq x_t$.
Dus krijgen we:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D(L)=j)\mathbb{P}(D(1)=i-j) + \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \mathbb{P}(D(L)=j)\mathbb{P}(D(1)=i-j) \geq SL.$$

Als we nu gebruik maken van een Poisson verdeelde vraag krijgen we:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda L)^j}{j!} e^{-\lambda L} \frac{\lambda^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\lambda} + \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda L)^j}{j!} e^{-\lambda L} \frac{\lambda^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\lambda} \geq SL.$$

Na omschrijven (uitgewerkt in appendix A), krijgen we nu:

$$\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda L)^j \lambda^{i-j}}{j!(i-j)!} e^{-\lambda(L+1)} \geq SL - \sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda(L+1))^i}{i!} e^{-\lambda(L+1)}.$$

Dus we gaan a keer de besteleenheid bestellen, met voor a de kleinste integer waarvoor aan de bovenstaande eis wordt voldaan.

Voorbeeld

We gebruiken hetzelfde voorbeeld als in Hoofdstuk 15.1, we nemen aan dat:

- $\lambda = 5$.
- De levertijd is 7 uur en de winkel is 12 uur per dag open; $L = \frac{7}{12}$.
- De besteleenheid bedraagt 6 consumenten eenheden, dus $Q = 6$.
- De service level eis bedraagt 95%.

Dan krijgen we:

$$\lambda(L+1) = 5 * (1 + \frac{7}{12}) \approx 7.92,$$

$$\lambda L = 5 * \frac{7}{12} \approx 2.92.$$

Gegeven de voorraad kunnen we berekenen hoeveel we moeten bestellen.
We bestellen de minimale waarde van a waarvoor geldt:

$$\underbrace{\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda L)^j \lambda^{i-j}}{j!(i-j)!} e^{-\lambda(L+1)}}_{\mathbb{P}(a)} \geq \underbrace{SL - \sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda(L+1))^i}{i!} e^{-\lambda(L+1)}}_{\widetilde{SL}}.$$

In de kolom $\widetilde{SL}$ staat de waarde van:

$$\widetilde{SL} = SL - \sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda(L+1))^i}{i!} e^{-\lambda(L+1)},$$

en met $\mathbb{P}(a)$ bedoelen we:

$$\mathbb{P}(a) = \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda L)^j \lambda^{i-j}}{j!(i-j)!} e^{-\lambda(L+1)}.$$

In de kolom genoeg staat of we bij het bestellen van a besteleenheden, met a het aantal in de kolom links van genoeg, aan de eis voldoen. Is dit niet het geval dan moeten we $\mathbb{P}(a+1)$ berekenen en kijken of er dan aan de eis voldaan wordt.

x_t	$\widetilde{SL}$	$\mathbb{P}(1)$	Genoeg?	$\mathbb{P}(2)$	Genoeg?
12	0.99	0.0596	Ja		
11	5.60	0.1054	Ja		
10	12.59	0.1743	Ja		
9	22.31	0.2691	Ja		
8	34.58	0.3861	Ja		
7	48.53	0.5124	Ja		
6	62.63	0.6243	Nee	0.6468	Ja

Uit Hoofdstuk 15.1 bleek dat we bij een voorraad van $x_t = 12$ of minder moesten gaan bestellen. Uit deze tabel blijkt dat als de voorraad tussen $x_t = 7$ en $x_t = 12$ ligt het bestellen van 1 besteleenheid voldoende is om aan de service level eis te voldoen.

14 Een Poisson verdeelde vraag met een variabele λ

Als de vraag Poisson verdeeld met voor iedere dag een andere λ dan moeten we eerst onderscheid maken tussen $L \leq Z_1$ en $L > Z_1$. Want als $L \leq Z_1$ dan bestellen we op dag x en wordt er geleverd in dag x, de volgende levering vindt dan plaats op dag $x+1$. Bijvoorbeeld we bestellen om 10.00 en krijgen geleverd om 18.00 dan komt de volgende levering om 18.00 de volgende dag en hoeven we dus maar met 2 dagen rekening te houden. Bestellen we op dag x om 16.00 en krijgen we geleverd op dag $x+1$ om 9.00 dan krijgen we de volgende levering om 9.00 op dag $x+2$ en moeten we dus rekening houden met 3 dagen.

14.1 Situatie 1: $L \leq Z_1$

14.1.1 Wanneer niet bestellen

Als $L \leq Z_1$ dan hoeven we niet te bestellen als geldt:

$$\mathbb{P}(D(Z) \leq x_t) \geq SL,$$

hierbij is Z weer gelijk aan $L+1$. Stel er zitten Z_1 tijdseenheden in dag 1 met verwachting λ_1 dan zitten er $Z_2 = Z - Z_1$ tijdseenheden in dag 2 met verwachting λ_2.
Dat betekent:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \mathbb{P}(D_1(Z_1) + D_2(Z_2) = i) \geq SL.$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen is dit gelijk aan:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j)\mathbb{P}(D_2(Z_2) = i - j) \geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!} e^{-\lambda_1 Z_1} * \frac{(\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\lambda_2 Z_2} \geq SL.$$

In appendix B.1.1 wordt berekend dat dit gelijk is aan:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)} \geq SL.$$

Dit is weer een Poisson verdeling met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$. We kunnen hiervan uitrekenen of deze aan de service level eis voldoet.

Voorbeeld

We nemen de aan dat:

- De winkel is 12 uur open, dit is 1 tijdseenheid.
- De levertijd is 7 uur, dit is $L = \frac{7}{12}$ tijdseenheden.
- We hebben nog 10 uur te gaan in dag 1, $Z_1 = \frac{10}{12}$ tijdseenheden.
- Dan is $Z_2 = \frac{L+1-Z_1}{12} = \frac{9}{12}$ tijdseenheden.
- $\lambda_1 = 5$ artikelen per dag.
- $\lambda_2 = 7$ artikelen per dag.
- De service level eis, $SL = 0.95$.

- De besteleenheid is 6 artikelen, $Q = 6$.

Gegeven de voorraad en de volgende formule:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)} \geq SL,$$

kunnen we berekenen of we moeten bestellen of niet:

x_t	$\mathbb{P}D(L+1) \leq x_t$	Bestellen?
5	0.0926	ja
6	0.1714	ja
7	0.2774	ja
8	0.4022	ja
9	0.5327	ja
10	0.6556	ja
11	0.7608	ja
12	0.8434	ja
13	0.9032	ja
14	0.9434	ja
15	0.9687	ja
16	0.9835	nee
17	0.9918	nee
18	0.9961	nee
19	0.9982	nee

Dus als de voorraad minder dan 15 artikelen is, dan moeten we bestellen.

14.1.2 Hoeveel te bestellen

Als we niet aan de service level eis voldoen zal er op tijdstip t een of meer besteleenheden moeten worden besteld. Het aantal besteleenheden dat besteld zal worden is de minimale waarde van a waarvoor geldt:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D(L) = j)\mathbb{P}(D(1) = i - j) + \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \mathbb{P}(D(L) = j)\mathbb{P}(D(1) = i - j) \geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(L) = j)\mathbb{P}(D_1(Z_1 - L) + D_2(Z_2) = i - j)$$

$$+ \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \mathbb{P}(D_1(L) = j)\mathbb{P}(D_1(Z_1 - L) + D_2(Z_2) = i - j) \geq SL.$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen krijgen we nu:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(L) = j) \sum_{k=0}^{i-j} \mathbb{P}(D_1(Z_1 - L) = k)\mathbb{P}(D_2(Z_2) = i - j - k)$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\mathbb{P}(D_1(L)=j)\sum_{k=0}^{i-j}\mathbb{P}(D_1(Z_1-L)=k)\mathbb{P}(D_2(Z_2)=i-j-k)\geq SL$$

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\frac{(\lambda_1 L)^j}{j!}e^{-\lambda_1 L}\sum_{k=0}^{i-j}\frac{(\lambda_1(Z_1-L))^k}{k!}e^{-\lambda_1(Z_1-L)}\frac{(\lambda_2 Z_2)^{i-j-k}}{(i-j-k)!}e^{-\lambda_2 Z_2}$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 L)^j}{j!}e^{-\lambda_1 L}\sum_{k=0}^{i-j}\frac{(\lambda_1(Z_1-L))^k}{k!}e^{-\lambda_1(Z_1-L)}\frac{(\lambda_2 Z_2)^{i-j-k}}{(i-j-k)!}e^{-\lambda_2 Z_2}\geq SL.$$

In appendix B.1.2 berekenen we dat dit gelijk is aan:

$$\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 L)^j(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{j!(i-j)!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2)}$$
$$\geq SL-\sum_{i=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2)^i}{i!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2)}.$$

Dus we gaan a keer de besteleenheid bestellen, met voor a de kleinste integer waarvoor aan de bovenstaande eis wordt voldaan.

Als $L > Z_1$ dan bestellen we op dag x en wordt er geleverd in dag $x+1$, de volgende levering vindt dan plaats op dag $x+2$. Bijvoorbeeld bestellen we op dag x om 16.00 en krijgen we geleverd op dag $x+1$ om 9.00 dan krijgen we de volgende levering om 9.00 op dag $x+2$ en moeten we dus rekening houden met 3 dagen.

Voorbeeld

We gebruiken hetzelfde voorbeeld als in Hoofdstuk 16.1.1, we nemen aan dat:

- De winkel is 12 uur open, dit is 1 tijdseenheid.
- De levertijd is 7 uur, dit is $L=\frac{7}{12}$ tijdseenheden.
- We hebben nog 10 uur te gaan in dag 1, $Z_1=\frac{10}{12}$ tijdseenheden.
- Dan is $Z_2=\frac{L+1-Z_1}{12}=\frac{9}{12}$ tijdseenheden.
- $\lambda_1=5$ artikelen per dag.
- $\lambda_2=7$ artikelen per dag.
- De service level eis, $SL=0.95$.
- De besteleenheid is 6 artikelen, $Q=6$.

Gegeven de voorraad en de volgende formule:

$$\underbrace{\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 L)^j(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{j!(i-j)!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2)}}_{\mathbb{P}(a)}$$

$$
\underbrace{\geq SL - \sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)},}_{\widetilde{SL}}
$$

kunnen we berekenen of we voldaan aan de service level eis als we respectievelijk 0, 1 en 2 besteleenheden bestellen.

x_t	0 BE	Genoeg?	1 BE	Genoeg?	2 BE	Genoeg?
5	0.0000	nee	0.5708	nee	0.7828	nee
6	0.0000	nee	0.6330	nee	0.8090	nee
7	0.0000	nee	0.6387	nee	0.7689	ja
8	0.0000	nee	0.5943	nee	0.6819	ja
9	0.0000	nee	0.5138	nee	0.5683	ja
10	0.0000	nee	0.4150	ja	0.4466	ja
11	0.0000	nee	0.3141	ja	0.3315	ja
12	0.0000	nee	0.2235	ja	0.2326	ja
13	0.0000	nee	0.1499	ja	0.1544	ja
14	0.0000	nee	0.0950	ja	0.0971	ja
15	0.0000	nee	0.0570	ja	0.0580	ja
16	0.0000	ja	0.0325	ja	0.0329	ja
17	0.0000	ja	0.0176	ja	0.0178	ja
18	0.0000	ja	0.0091	ja	0.0091	ja
19	0.0000	ja	0.0045	ja	0.0045	ja

hierbij staat in kolom a BE de waarde van:

$$
\mathbb{P}(a) = \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 L)^j (\lambda_1 (Z_1 - L) + \lambda_2 Z_2)^{i-j}}{j!(i-j)!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)},
$$

dit is genoeg als dit groter of gelijk is aan:

$$
\widetilde{SL} = SL - \sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)}.
$$

14.2 Situatie 2: $L > Z_1$

14.2.1 Wanneer niet bestellen

Als $L > Z_1$ dan hoeven we niet te bestellen als geldt:

$$
\mathbb{P}(D(Z) \leq x_t) \geq SL,
$$

hierbij is Z weer gelijk aan $L + 1$. Stel er zitten Z_1 tijdseenheden in dag 1 met verwachting λ_1, dag 2 moeten we in zijn geheel meetellen (dus 1 tijdseenheid) met verwachting λ_2 en $Z_3 = Z - 1 - Z_1 = L - Z_1$ tijdseenheden in dag 3 met verwachting λ_3.
Dat betekent:

$$
\sum_{i=0}^{x_t} \mathbb{P}(D_1(Z_1) + D_2(1) + D_3(Z_3) = i) \geq SL.
$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen is dit gelijk aan:

$$\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\mathbb{P}(D_1(Z_1)=j)\mathbb{P}(D_2(1)+D_3(Z_3)=i-j)\geq SL$$

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\mathbb{P}(D_1(Z_1)=j)\sum_{k=0}^{j}\mathbb{P}(D_2(1)=k)\mathbb{P}(D_3(Z_3)=i-j-k)\geq SL$$

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!}e^{-\lambda_1 Z_1}\sum_{k=0}^{j}\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{(\lambda_3 Z_3)^{i-j-k}}{(i-j-k)!}e^{-\lambda_3 Z_3}\geq SL.$$

In appendix B.2.1 wordt berekend dat dit gelijk is aan:

$$\sum_{i=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)^i}{i!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)}\geq SL.$$

Dit is weer een Poisson verdeling met verwachting $\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3$. We kunnen hiervan uitrekenen of dit aan de service level eis voldoet.

Voorbeeld

We nemen de aan dat:

- De winkel is 12 uur open, dit is 1 tijdseenheid.
- De levertijd is 7 uur, dit is $L=\frac{7}{12}$ tijdseenheden.
- We hebben nog 3 uur te gaan in dag 1, $Z_1=\frac{3}{12}$ tijdseenheden.
- We weten dat $Z_2=1$ tijdseenheid.
- Dan is $Z_3=\frac{L+1-Z_1-Z_2}{12}=\frac{L-Z_1}{12}=\frac{4}{12}$ tijdseenheden.
- $\lambda_1=5$ artikelen per dag.
- $\lambda_2=7$ artikelen per dag.
- $\lambda_3=6$ artikelen per dag.
- De service level eis, $SL=0.95$.
- De besteleenheid is 6 artikelen, $Q=6$.

Gegeven de voorraad en de volgende formule:

$$\sum_{i=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)^i}{i!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)}\geq SL,$$

kunnen we berekenen of we moeten bestellen of niet:

x_t	$\mathbb{P}D(L+1) \leq x_t$	Bestellen?
5	0.0582	ja
6	0.1151	ja
7	0.1985	ja
8	0.3054	ja
9	0.4271	ja
10	0.5518	ja
11	0.6680	ja
12	0.7673	ja
13	0.8456	ja
14	0.9029	ja
15	0.9420	ja
16	0.9671	nee
17	0.9822	nee
18	0.9909	nee
19	0.9955	nee

Dus als de voorraad minder dan 16 artikelen is, dan moeten we bestellen.

14.2.2 Hoeveel te bestellen

Als er zonder bestellen niet aan de service level eis kan worden voldaan moeten we bestellen. We weten al dat:

$$\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\mathbb{P}(D(L)=j)\mathbb{P}(D(1)=i-j)+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\mathbb{P}(D(L)=j)\mathbb{P}(D(1)=i-j)\geq SL.$$

De levertijd L bestaat uit Z_1 tijdseenheden op dag 1 en $L-Z_1$ tijdseenheden op dag 2. Een hele dag na levering bestaat uit $1-(L-Z_1)$ tijdseenheden op dag 2 en Z_3 tijdseenheden op dag 3. We krijgen dus:

$$\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\mathbb{P}(D_1(Z_1)+D_2(L-Z_1)=j)\mathbb{P}(D_2(1-(L-Z_1))+D_3(Z_3)=i-j)$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\mathbb{P}(D_1(Z_1)+D_2(L-Z_1)=j)\mathbb{P}(D_2(1-(L-Z_1))+D_3(Z_3)=i-j)\geq SL.$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen krijgen we:

$$\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}\mathbb{P}(D_1(Z_1)=k)\mathbb{P}(D_2(L-Z_1)=j-k)$$

$$*\sum_{l=0}^{i-j}\mathbb{P}(D_2(1-(L-Z_1))=l)\mathbb{P}(D_3(Z_3)=i-j-l)$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\sum_{k=0}^{j}\mathbb{P}(D_1(Z_1)=k)\mathbb{P}(D_2(L-Z_1)=j-k)$$

$$* \sum_{l=0}^{i-j} \mathbb{P}(D_2(1-(L-Z_1)) = l)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i-j-l) \geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j} \frac{(\lambda_1 Z_1)^k}{k!} e^{-\lambda_1 Z_1} \frac{(\lambda_2(L-Z_1))^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda_2(L-Z_1)}$$

$$* \sum_{l=0}^{i-j} \frac{(\lambda_2(1-(L-Z_1)))^l}{l!} e^{-\lambda_2(1-(L-Z_1))} \frac{(\lambda_3 Z_3)^{i-j-l}}{(i-j-l)!} e^{-\lambda_3 Z_3}$$

$$+ \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\sum_{k=0}^{j} \frac{(\lambda_1 Z_1)^k}{k!} e^{-\lambda_1 Z_1} \frac{(\lambda_2(L-Z_1))^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda_2(L-Z_1)}$$

$$* \sum_{l=0}^{i-j} \frac{(\lambda_2(1-(L-Z_1)))^l}{l!} e^{-\lambda_2(1-(L-Z_1))} \frac{(\lambda_3 Z_3)^{i-j-l}}{(i-j-l)!} e^{-\lambda_3 Z_3} \geq SL.$$

In appendix B.2.2 berekenen we dat dit gelijk is aan:

$$\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L-Z_1))^j(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)^{i-j}}{j!(i-j)!} e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)}$$

$$\geq SL - \sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)}.$$

De eerste a waarvoor aan de bovenstaande vergelijking wordt voldaan is het aantal besteleenheden dat we zullen gaan bestellen.

Voorbeeld

We gebruiken hetzelfde voorbeeld als in Hoofdstuk 16.1.1, we nemen aan dat:

- De winkel is 12 uur open, dit is 1 tijdseenheid.
- De levertijd is 7 uur, dit is $L = \frac{7}{12}$ tijdseenheden.
- We hebben nog 3 uur te gaan in dag 1, $Z_1 = \frac{3}{12}$ tijdseenheden.
- We weten dat $Z_2 = 1$ tijdseenheid.
- Dan is $Z_3 = \frac{L+1-Z_1-Z_2}{12} = \frac{L-Z_1}{12} = \frac{4}{12}$ tijdseenheden.
- $\lambda_1 = 5$ artikelen per dag.
- $\lambda_2 = 7$ artikelen per dag.
- $\lambda_3 = 6$ artikelen per dag.
- De service level eis, $SL = 0.95$.
- De besteleenheid is 6 artikelen, $Q = 6$.

Gegeven de voorraad en de volgende formule:

$$\underbrace{\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))^j(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)^{i-j}}{j!(i-j)!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)}}_{\mathbb{P}(a)}$$

$$\underbrace{\geq SL-\sum_{i=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)^i}{i!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)}}_{\widetilde{SL}},$$

kunnen we berekenen of we voldaan aan de service level eis als we respectievelijk 0, 1 en 2 besteleenheden bestellen.

x_t	0 BE	Genoeg?	1 BE	Genoeg?	2 BE	Genoeg?
5	0.0000	nee	0.5708	nee	0.7828	nee
6	0.0000	nee	0.6330	nee	0.8090	nee
7	0.0000	nee	0.6387	nee	0.7689	ja
8	0.0000	nee	0.5943	nee	0.6819	ja
9	0.0000	nee	0.5138	nee	0.5683	ja
10	0.0000	nee	0.4150	ja	0.4466	ja
11	0.0000	nee	0.3141	ja	0.3315	ja
12	0.0000	nee	0.2235	ja	0.2326	ja
13	0.0000	nee	0.1499	ja	0.1544	ja
14	0.0000	nee	0.0950	ja	0.0971	ja
15	0.0000	nee	0.0570	ja	0.0580	ja
16	0.0000	ja	0.0325	ja	0.0329	ja
17	0.0000	ja	0.0176	ja	0.0178	ja
18	0.0000	ja	0.0091	ja	0.0091	ja
19	0.0000	ja	0.0045	ja	0.0045	ja

hierbij staat in kolom $a\ BE$ de waarde van:

$$\mathbb{P}(a)=\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))^j(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)^{i-j}}{j!(i-j)!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)}.$$

De bestelling is genoeg als geldt dat $x\ BE$ groter of gelijk is aan:

$$\widetilde{SL}=SL-\sum_{i=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)^i}{i!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2+\lambda_3 Z_3)}.$$

15 De bestelstrategie met gebruik van kosten van nee-verkopen

Als we gebruik maken van kosten van nee-verkopen in plaats van een service level eis gaan we de kosten minimaliseren. We weten dat de voorraadkosten een stijgende functie zijn met betrekking tot de voorraad. De kosten van nee-verkopen zijn een dalende functie met betrekking tot de vraag.

We definiëren de volgende variabelen:
c = de kosten van nee-verkopen per gemiste vraag per artikel,
$\mathbb{C}D(x)$: de verwachtte nee verkopen over x tijdseenheden, gegeven de vraag verdeling D,
$C(x)$ = verwachte kosten van nee-verkopen over x tijdseenheden,
$\mathbb{V}D(x)$: de verwachtte verkopen over x tijdseenheden, gegeven de vraag verdeling D,
$\mathbb{X}D(x)$: de verwachtte voorraad na x tijdseenheden, gegeven de vraag verdeling D,
$V(x)$ = gemiddelde voorraadkosten over x tijdseenheden,
$T(x)$ = totale kosten over x tijdseenheden.

15.1 Kosten bij niet bestellen

Als we niet bestellen hebben we de verwachte kosten van nee-verkopen tijdens $L+1$ tijdseenheden en de gemiddelde voorraadkosten gedurende $L+1$ tijdseenheden. De verwachtte kosten van nee-verkopen worden als volgt berekend:

$$C(L+1) = c \sum_{i=x_t+1}^{\infty} i\mathbb{P}(D(L+1) = i).$$

De definitie van de verwachting van de vraag is:

$$\mathbb{E}D(L+1) = \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}(D(L+1) = i).$$

We hebben nu nee-verkopen als de verwachte vraag groter is dan de voorraad die we op dit ogenblik hebben. De verwachte nee-verkopen zijn:

$$\mathbb{C}D(L+1) = \mathbb{E}max(0, D(L+1) - x_t),$$

de verwachte kosten van nee-verkopen zijn dus:

$$C(L+1) = c\mathbb{C}D(L+1).$$

De verwachte verkopen kunnen echter niet hoger zijn dan de voorraad op het besteltijdstip x_t. We definiëren:

$$\mathbb{V}D(L+1) = \sum_{i=0}^{\infty} min(i, x_t)\mathbb{P}(D(L+1) = i) = \sum_{i=0}^{x_t} i\mathbb{P}(D(L+1) = i) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t\mathbb{P}(D(L+1) = i),$$

als de verwachte verkopen gegeven de voorraad op tijdstip t.
De verwachtte voorraad na $L+1$ tijdseenheden is nu:

$$\mathbb{X}D(L+1) = x_t - \mathbb{V}D(L+1).$$

De verwachte voorraadkosten berekend over $L+1$ tijdseenheden zijn dan:

$$V(L+1) = h * (L+1) * \frac{x_t + \mathbb{X}D(L+1)}{2} = \frac{h(L+1)}{2}(2x_t - \mathbb{V}D(L+1)).$$

De verwachte totale kosten zijn nu: $T(L+1) = C(L+1) + V(L+1)$.

15.2 Kosten bij wel bestellen

Als we wel bestellen moeten we onderscheid maken tussen de vraag voor levering en de vraag na levering. We krijgen dan ook de verwachte kosten van nee-verkopen voor levering (C_1) en de verwachte kosten van nee-verkopen na levering (C_2).
De verwachte nee-verkopen zijn:

$$\mathbb{C}_1 D(L) = \mathbb{E} max(0, D(L) - x_t),$$

de verwachte kosten van nee-verkopen zijn:

$$C_1(L) = c\mathbb{C}_1 D(L).$$

De verwachte verkoop gedurende de levertijd is:

$$\mathbb{V}_1 D(L) = \sum_{i=0}^{x_t} i\mathbb{P}(D(L) = i) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \mathbb{P}(D(L) = i),$$

dus we verwachten om:

$$\mathbb{X}_1 D(L) = x_t - \mathbb{V}_1 D(L),$$

voorraad te hebben op moment van leveren.
De verwachte voorraad direct na het leveren van a besteleenheden is:

$$x_{t+L}(a) = \mathbb{X}_1 D(L) + aQ.$$

De verwachte nee-verkopen zijn:

$$\mathbb{C}_2(D(1), a) = \mathbb{E} max(0, D(1) - x_{t+L}(a)),$$

de verwachte kosten van nee-verkopen zijn:

$$C_2(1, a) = c\mathbb{C}_2(D(1), a).$$

De verwachte voorraadkosten voor levering (V_1) zijn:

$$V_1(L) = hL * \frac{x_t + \mathbb{X}_1 D(L)}{2} = \frac{hL}{2}(2x_t - \mathbb{V}_1 D(L)).$$

De verwachte verkopen gedurende de volgende dag zijn:

$$\mathbb{V}_2(D(1), a) = \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i\mathbb{P}(D(1) = i) + \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a)\mathbb{P}(D(1) = i).$$

Dan is de verwachte voorraad aan het eind van de dag:

$$\mathbb{X}_2(D(1), a) = x_{t+L}(a) - \mathbb{V}_2(D(1), a),$$

hiermee kunnen we de verwachte voorraadkosten na levering bepalen:

$$V_2(1, a) = h\frac{x_{t+L}(a) + \mathbb{X}_2(D(1), a)}{2} = \frac{h}{2}(2x_{t+L}(a) - \mathbb{V}_2(D(1), a)).$$

De totale verwachte kosten zijn nu: $T(L+1,a) = C_1(L) + C_2(1,a) + V_1(L) + V_2(1,a)$.

We bestellen niet als $T(L+1) < T(L+1,a)\ \forall a > 0$, anders bestellen we a eenheden zo dat $T(L+1,a)$ minimaal is.

16 Een Poisson verdeelde vraag met vaste λ

16.1 Kosten bij niet bestellen

Als we niet bestellen en we hebben een Poisson verdeelde vraag met vaste λ dan hebben we de volgende verwachte kosten.
De verwachting van een Poisson verdeelde vraag met parameter λ is $\mathbb{E}D(L) = \lambda L$. We hebben de volgende verwachte nee-verkopen:

$$\mathbb{C}D(L+1) = \mathbb{E}max(0, D(L+1) - x_t),$$

de verwachte kosten van nee-verkopen zijn dus:

$$C(L+1) = c\mathbb{C}D(L+1).$$

De verwachte verkopen over $L+1$ tijdseenheden zijn:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}D(L+1) &= \sum_{i=0}^{x_t} i\mathbb{P}(D(L+1) = i) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t\mathbb{P}(D(L+1) = i)\\ &= \sum_{i=0}^{x_t} i\frac{(\lambda(L+1))^i}{i!}e^{-\lambda(L+1)} + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t\frac{(\lambda(L+1))^i}{i!}e^{-\lambda(L+1)}.\end{aligned}$$

De verwachte voorraadkosten berekend over $L+1$ tijdseenheden zijn dan:

$$V(L+1) = \frac{h(L+1)}{2}(2x_t - \mathbb{V}D(L+1))$$

De verwachte totale kosten zijn dus: $T(L+1) = C(L+1) + V(L+1)$.

Voorbeeld

We nemen de aan dat:

- De winkel is 12 uur open, dit is 1 tijdseenheid.
- De levertijd is 7 uur, dit is $L = \frac{7}{12}$ tijdseenheden.
- $\lambda = 5$ artikelen per dag.
- De besteleenheid is 6 artikelen, $Q = 6$.
- De kosten van nee-verkopen is 3 euro per artikel.
- De vooraadkosten zijn 2 euro per artikel per uur.

Gegeven de voorraad kunnen we berekenen wat de kosten van nee-verkoop en voorraad zijn:

x_t	$C(L+1)$	$V(L+1)$	$T(L+1)$
5	9.00	0.66	9.66
6	6.00	0.79	6.79
7	3.00	1.06	4.06
8	0.00	1.19	1.19
9	0.00	1.45	1.45
10	0.00	1.58	1.58
11	0.00	1.85	1.85
12	0.00	2.11	2.11
13	0.00	2.38	2.38
14	0.00	2.64	2.64
15	0.00	2.90	2.90
16	0.00	3.17	3.17
17	0.00	3.43	3.43
18	0.00	3.69	3.69
19	0.00	3.96	3.96

16.2 Kosten bij wel bestellen

Als we wel bestellen en we hebben een Poisson verdeelde vraag met vaste λ dan hebben we de volgende verwachte kosten.

De verwachte nee-verkopen zijn:

$$\mathbb{C}_1 D(L) = \mathbb{E} max(0, D(L) - x_t),$$

de verwachte kosten van nee-verkopen zijn:

$$C_1(L) = c\mathbb{C}_1 D(L).$$

De verwachte verkoop gedurende de levertijd is:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_1 D(L) &= \sum_{i=0}^{x_t} i\mathbb{P}(D(L) = i) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \mathbb{P}(D(L) = i) \\ &= \sum_{i=0}^{x_t} i\frac{(\lambda L)^i}{i!}e^{-\lambda L} + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \frac{(\lambda L)^i}{i!}e^{-\lambda L},\end{aligned}$$

dus we verwachten om:

$$\mathbb{X}_1 D(L) = x_t - \mathbb{V}_1 D(L),$$

voorraad te hebben op moment van leveren.

De verwachte voorraad direct na het leveren van a besteleenheden is dan:

$$x_{t+L}(a) = \mathbb{X}_1 D(L) + aQ.$$

De verwachte nee-verkopen zijn:

$$\mathbb{C}_2(D(1), a) = \mathbb{E}max(0, D(1) - x_{t+L}(a)),$$

de verwachte kosten van nee-verkopen zijn:

$$C_2(1, a) = c\mathbb{C}_2(D(1), a).$$

De verwachte voorraadkosten voor levering (V_1) zijn:

$$V_1(L) = \frac{hL}{2}(2x_t - \mathbb{V}_1 D(L)).$$

De verwachte verkopen gedurende de volgende dag zijn:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_2(D(1), a) &= \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i\mathbb{P}(D(1) = i) + \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a)\mathbb{P}(D(1) = i) \\
&= \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} + \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a)\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Dan is de verwachte voorraad aan het eind van de dag:

$$\mathbb{X}_2(D(1), a) = x_{t+L}(a) - \mathbb{V}_2(D(1), a),$$

hiermee kunnen we de verwachte voorraadkosten na levering bepalen:

$$V_2(1, a) = \frac{h}{2}(2x_{t+L}(a) - \mathbb{V}_2(D(1), a)).$$

De totale verwachte kosten zijn nu: $T(L+1, a) = C_1(L) + C_2(1, a) + V_1(L) + V_2(1, a)$.

We bestellen niet als $T(L+1) < T(L+1, a)\ \forall a > 0$, anders bestellen we a eenheden zo dat $T(L+1, a)$ minimaal is.

Voorbeeld

We gebruiken hetzelfde voorbeeld als in Hoofdstuk 18.1, we nemen aan dat:

- De winkel is 12 uur open, dit is 1 tijdseenheid.
- De levertijd is 7 uur, dit is $L = \frac{7}{12}$ tijdseenheden.
- $\lambda = 5$ artikelen per dag.
- De besteleenheid is 6 artikelen, $Q = 6$.
- De kosten van nee-verkopen is 3 euro per artikel.

- De vooraadkosten zijn 2 euro per artikel per uur.
- De vooraad op het bestelmoment is $x_t = 5$.

Dan kunnen we berekenen wat de kosten zijn als we a besteleenheden bestellen.

a	$C_1(L)$	$V_1(L)$	$C_2(1,a)$	$V_2(1,a)$	$T(L+1,a)$
0	0.00	0.34	9.00	0.17	9.51
1	0.00	0.34	0.00	0.92	1.26
2	0.00	0.34	0.00	1.92	2.26
3	0.00	0.34	0.00	2.92	3.26
4	0.00	0.34	0.00	3.92	4.26

We zien dat bij het bestellen van $a = 1$ besteleenheid de kosten minimaal zijn.

Het verschil tussen de totale kosten bij het bestellen van $a = 0$ besteleenheden en de totale kosten bij niet bestellen komt door afrondingen.

17 Een Poisson verdeelde vraag met een variabele λ

17.1 Situatie 1: $L \leq Z_1$

Als $L \leq Z_1$, met Z_1 het aantal tijdseenheden van dag 1 met verwachting λ_1 en Z_2 het aantal tijdseenheden van dag 2 met verwachting λ_2, waarbij $Z_1 + Z_2 = L + 1$. Dan hebben we de volgende kosten:

17.1.1 Kosten bij niet bestellen

Als we bestellen niet dan hebben we de volgende verwachte kosten van nee-verkopen:

$$\mathbb{C}D(L+1) = \mathbb{E}max(0, D_1(Z_1)+D_2(L+1-Z_1)-x_t) = max(0, \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}(D_1(Z_1)+D_2(L+1-Z_1) = i)-x_t).$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen geldt:

$$= max(0, \sum_{i=0}^{\infty} i \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j)\mathbb{P}(D_2(Z_2) = i - j) - x_t).$$

In appendix C.1.1 laten we zien dat $\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j)\mathbb{P}(D_2(Z_2) = i - j)$ een Poisson verdeling is met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$, als we dit gebruiken krijgen we:

$$\mathbb{C}D(L+1) = max(0, \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 - x_t),$$

de verwachte kosten van nee-verkopen zijn dus:

$$C(L+1) = c\mathbb{C}D(L+1) = c * max(0, \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 - x_t).$$

De verwachte verkopen zijn:

$$\mathbb{V}D(L+1) = \sum_{i=0}^{x_t} i\mathbb{P}(D(L+1) = i) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t\mathbb{P}(D(L+1) = i)$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} i\mathbb{P}(D_1(Z_1) + D_2(Z_2) = i) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t\mathbb{P}(D_1(Z_1) + D_2(Z_2) = i).$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen is dit gelijk aan:

$$\sum_{i=0}^{x_t} i \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j)\mathbb{P}(D_2(Z_2) = i - j) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j)\mathbb{P}(D_2(Z_2) = i - j).$$

In appendix C.1.1 hebben we laten zien dat $\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j)\mathbb{P}(D_2(Z_2) = i - j)$ een Poisson verdeling is met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$, als we dit gebruiken krijgen we:

$$\mathbb{V}D(L+1) = \sum_{i=0}^{x_t} i\frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)} + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)}.$$

De verwachte voorraadkosten berekend over $L + 1$ tijdseenheden zijn dan:

$$V(L+1) = \frac{h(L+1)}{2}(2x_t - \mathbb{V}D(L+1)).$$

De verwachte totale kosten zijn dus: $T(L + 1) = C(L + 1) + V(L + 1)$.

Voorbeeld

We nemen de aan dat:

- De winkel is 12 uur open, dit is 1 tijdseenheid.
- De levertijd is 7 uur, dit is $L = \frac{7}{12}$ tijdseenheden.
- $\lambda_1 = 5$ artikelen per dag.
- $\lambda_2 = 6$ artikelen per dag.
- $Z_1 = \frac{9}{12}$ tijdseenheden.
- $Z_2 = \frac{L+1-Z_1}{12} = \frac{10}{12}$ tijdseenheden.
- De besteleenheid is 6 artikelen, $Q = 6$.
- De kosten van nee-verkopen is 3 euro per artikel.
- De vooraadkosten zijn 2 euro per artikel per uur.

Gegeven de voorraad kunnen we berekenen wat de kosten van nee-verkoop en voorraad zijn:

x_t	$C(L+1)$	$V(L+1)$	$T(L+1)$
5	12.00	0.66	12.66
6	9.00	0.79	9.79
7	6.00	0.92	6.92
8	3.00	1.19	4.19
9	0.00	1.32	1.32
10	0.00	1.58	1.58
11	0.00	1.85	1.85
12	0.00	1.98	1.98
13	0.00	2.24	2.24
14	0.00	2.51	2.51
15	0.00	2.77	2.77
16	0.00	3.03	3.03
17	0.00	3.30	3.30
18	0.00	3.56	3.56
19	0.00	3.83	3.83

17.1.2 Kosten bij wel bestellen

Als we wel bestellen dan hebben we de volgende verwachte kosten.

De verwachte nee-verkopen zijn:

$$\mathbb{C}_1 D(L) = \mathbb{E} max(0, D(L) - x_t),$$

we hebben aangenomen dat $L \leq Z_1$ dus krijgen we:

$$= \mathbb{E} max(0, D_1(L) - x_t).$$

De verwachte kosten van nee-verkopen zijn dan:

$$C_1(L) = c\mathbb{C}_1 D(L).$$

De verwachte verkoop gedurende de levertijd is:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_1 D(L) &= \sum_{i=0}^{x_t} i\mathbb{P}(D(L) = i) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \mathbb{P}(D(L) = i)\\ &= \sum_{i=0}^{x_t} i\frac{(\lambda_1 L)^i}{i!} e^{-\lambda_1 L} + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \frac{(\lambda_1 L)^i}{i!} e^{-\lambda_1 L},\end{aligned}$$

dus we verwachten om:

$$\mathbb{X}_1 D(L) = x_t - \mathbb{V}_1 D(L),$$

voorraad te hebben op moment van leveren.

De verwachte voorraad direct na het leveren van a besteleenheden is:

$$x_{t+L}(a) = \mathbb{X}_1 D(L) + aQ.$$

De verwachte nee-verkopen zijn:

$$\mathbb{C}_2(D(1),a) = \mathbb{E}max(0, D_1(L-Z_1)+D_2(1-L+Z_1)-x_{t+L}(a)) = max(0, \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(D(1)=i)-x_{t+L}(a)),$$

waarbij nog $Z_1 - L$ tijdseenheden in dag 1 zitten en Z_2 tijdseenheden in dag 2.

$$\mathbb{C}_2(D(1),a) = max(0, \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(D_1(Z_1-L)+D_2(Z_2)=i) - x_{t+L}(a)).$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen is dit:

$$max(0, \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1-L)=j)\mathbb{P}(D_2(Z_2)=i-j) - x_{t+L}(a)).$$

In appendix C.1.2 laten we zien dat $\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1-L)=j)\mathbb{P}(D_2(Z_2)=i-j)$ een Poisson verdeling is met verwachting $\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2$, als we dit gebruiken krijgen we:

$$\mathbb{C}_2(D(1),a) = max(0, \lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2 - x_{t+L}(a)).$$

De verwachte kosten van nee-verkopen zijn dus:

$$C_2(1,a) = c\mathbb{C}_2(D(1),a) = c * max(0, \lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2 - x_{t+L}(a)).$$

De verwachte voorraadkosten voor levering (V_1) zijn:

$$V_1(L) = \frac{hL}{2}(2x_t - \mathbb{V}_1 D(L)).$$

De verwachte verkopen gedurende de volgende dag zijn:

$$\mathbb{V}_2(D(1),a) = \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i\mathbb{P}(D(1)=i) + \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a)\mathbb{P}(D(1)=i)$$

$$= \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i\mathbb{P}(D_1(Z_1-L)+D_2(Z_2)=i) + \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a)\mathbb{P}(D_1(Z_1-L)+D_2(Z_2)=i).$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen is dit gelijk aan:

$$\sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1-L)=j)\mathbb{P}(D_2(Z_2)=i-j)$$

$$+ \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a) \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1-L)=j)\mathbb{P}(D_2(Z_2)=i-j).$$

In appendix C.1.2 laten we zien dat $\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1-L)=j)\mathbb{P}(D_2(Z_2)=i-j)$ een Poisson verdeling is met verwachting $\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2$, als we dit gebruiken krijgen we:

$$\mathbb{V}_2(D(1),a) = \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i\frac{(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)}$$

$$+\sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a)\frac{(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^i}{i!}e^{-(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)}.$$

Dan is de verwachte voorraad aan het eind van de dag:

$$\mathbb{X}_2(D(1),a) = x_{t+L}(a) - \mathbb{V}_2(D(1),a),$$

hiermee kunnen we de verwachte voorraadkosten na levering bepalen:

$$V_2(1,a) = \frac{h}{2}(2x_t - \mathbb{V}_2(D(1),a)).$$

De totale verwachte kosten zijn nu: $T(L+1,a) = C_1(L) + C_2(1,a) + V_1(L) + V_2(1,a)$.

We bestellen niet als $T(L+1) < T(L+1,a)\ \forall a > 0$, anders bestellen we a eenheden zo dat $T(L+1,a)$ minimaal is.

Voorbeeld

We gebruiken hetzelfde voorbeeld als in Hoofdstuk 19.1.1, we nemen aan dat:

- De winkel is 12 uur open, dit is 1 tijdseenheid.
- De levertijd is 7 uur, dit is $L = \frac{7}{12}$ tijdseenheden.
- $\lambda_1 = 5$ artikelen per dag.
- $\lambda_2 = 6$ artikelen per dag.
- $Z_1 = \frac{9}{12}$ tijdseenheden.
- $Z_2 = \frac{L+1-Z_1}{12} = \frac{10}{12}$ tijdseenheden.
- De besteleenheid is 6 artikelen, $Q = 6$.
- De kosten van nee-verkopen is 3 euro per artikel.
- De vooraadkosten zijn 2 euro per artikel per uur.
- De voorraad op het bestelmoment is $x_t = 5$

Dan kunnen we berekenen wat de kosten zijn als we a besteleenheden bestellen.

a	$C_1(L)$	$V_1(L)$	$C_2(1,a)$	$V_2(1,a)$	$T(L+1,a)$
0	0.00	0.34	12.00	0.17	12.51
1	0.00	0.34	0.00	0.83	1.17
2	0.00	0.34	0.00	1.83	2.17
3	0.00	0.34	0.00	2.83	3.17
4	0.00	0.34	0.00	3.83	4.17

We zien dat bij het bestellen van $a = 1$ besteleenheid de kosten minimaal zijn.

Het verschil tussen de totale kosten bij het bestellen van $a = 0$ besteleenheden en de totale kosten bij niet bestellen komt door afrondingen.

17.2 Situatie 2: $L > Z_1$

Als $L > Z_1$, met Z_1 het aantal tijdseenheden van dag 1 met verwachting λ_1, Z_2 het aantal tijdseenheden van dag 2 met verwachting λ_2 en Z_3 het aantal tijdseenheden van dag 3 met verwachting λ_3 waarbij $Z_1 + Z_2 + Z_3 = L + 1$. Omdat $L > Z_1$ weten we dat dag 1 geheel in de levertijd ligt, er liggen dan nog $L - Z_1$ tijseenheden van dag 2 in de levertijd.

17.2.1 Kosten bij niet bestellen

Als we bestellen niet dan hebben we de volgende verwachte kosten van nee-verkopen:

$$\mathbb{C}D(L+1) = \mathbb{E}max(0, D_1(Z_1)+D_2(L+1-Z_1)-x_t) = max(0, \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}((D_1(Z_1)+D_2(Z_2)+D_3(Z_3) = i)-x_t).$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen geldt:

$$max(0, \sum_{i=0}^{\infty} i \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j) \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}(D_2(Z_2) = k)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j - k) - x_t).$$

In appendix C.2.1 laten we zien dat $\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j) \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}(D_2(Z_2) = k)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j - k)$ een Poisson verdeling is met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3$, als we dit gebruiken krijgen we:

$$\mathbb{C}D(L + 1) = max(0, \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3 - x_t),$$

de verwachte kosten van nee-verkopen zijn dus:

$$C(L + 1) = c\mathbb{C}D(L + 1) = c * max(0, \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3 - x_t).$$

De verwachte verkopen zijn:

$$\mathbb{V}D(L + 1) = \sum_{i=0}^{x_t} i\mathbb{P}(D(L + 1) = i) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t\mathbb{P}(D(L + 1) = i)$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} i\mathbb{P}(D_1(Z_1) + D_2(Z_2) + D_3(Z_3) = i) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t\mathbb{P}(D_1(Z_1) + D_2(Z_2) + D_3(Z_3) = i).$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen is dit gelijk aan:

$$\sum_{i=0}^{x_t} i \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j) \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}(D_2(Z_2) = k)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j - k)$$

$$+ \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j) \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}(D_2(Z_2) = k)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j - k).$$

In appendix C.2.1 hebben we laten zien dat $\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j) \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}(D_2(Z_2) = k)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j - k)$ een Poisson verdeling is met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3$, als we dit gebruiken krijgen we:

$$\mathbb{V}D(L+1) = \sum_{i=0}^{x_t} i \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)}$$

$$+ \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)}.$$

De verwachte voorraadkosten berekend over $L+1$ tijdseenheden zijn dan:

$$V(L+1) = \frac{h(L+1)}{2}(2x_t - \mathbb{V}D(L+1)).$$

De verwachte totale kosten zijn dus: $T(L+1) = C(L+1) + V(L+1)$.

Voorbeeld

We nemen de aan dat:

- De winkel is 12 uur open, dit is 1 tijdseenheid.
- De levertijd is 7 uur, dit is $L = \frac{7}{12}$ tijdseenheden.
- $\lambda_1 = 5$ artikelen per dag.
- $\lambda_2 = 6$ artikelen per dag.
- $Z_1 = \frac{9}{12}$ tijdseenheden.
- $Z_2 = \frac{L+1-Z_1}{12} = \frac{10}{12}$ tijdseenheden.
- De besteleenheid is 6 artikelen, $Q = 6$.
- De kosten van nee-verkopen is 3 euro per artikel.
- De vooraadkosten zijn 2 euro per artikel per uur.

Gegeven de voorraad kunnen we berekenen wat de kosten van nee-verkoop en voorraad zijn:

x_t	$C(L+1)$	$V(L+1)$	$T(L+1)$
5	15.00	0.66	15.66
6	12.00	0.79	12.79
7	9.00	0.92	9.92
8	6.00	1.06	7.06
9	3.00	1.32	4.32
10	0.00	1.45	1.45
11	0.00	1.72	1.72
12	0.00	1.98	1.98
13	0.00	2.11	2.11
14	0.00	2.38	2.38
15	0.00	2.64	2.64
16	0.00	2.90	2.90
17	0.00	3.17	3.17
18	0.00	3.43	3.43
19	0.00	3.69	3.69

17.2.2 Kosten bij wel bestellen

Als we wel bestellen dan hebben we de volgende verwachte kosten.

De verwachte nee-verkopen zijn:

$$\mathbb{C}_1 D(L) = \mathbb{E} max(0, D_1(Z_1) + D_2(L - Z_1) - x_t) = max(0, \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(D(L) = i) - x_t),$$

we hebben aangenomen dat $L > Z_1$ dus krijgen we:

$$\mathbb{C}_1 D(L) = max(0, \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(D_1(Z_1) + D_2(L - Z_1) = i) - x_t).$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen krijgen we:

$$max(0, \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j)\mathbb{P}(D_2(L - Z_1) = i - j) - x_t).$$

In appendix C.2.2 laten we zien dat $\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j)\mathbb{P}(D_2(L - Z_1) = i - j)$ een Poisson verdeling is met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1)$, als we dit gebruiken krijgen we:

$$\mathbb{C}_1 D(L) = max(0, \lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1) - x_t).$$

De verwachte kosten van nee-verkopen zijn dan:

$$C_1(L) = c\mathbb{C}_1 D(L) = c * max(0, \lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1) - x_t).$$

De verwachte verkoop gedurende de levertijd is:

$$\mathbb{V}_1 D(L) = \sum_{i=0}^{x_t} i\mathbb{P}(D(L) = i) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \mathbb{P}(D(L) = i),$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} i\mathbb{P}(D_1(Z_1) + D_2(L - Z_1) = i) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t\mathbb{P}(D_1(Z_1) + D_2(L - Z_1) = i).$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen krijgen we:

$$\sum_{i=0}^{x_t} i \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j)\mathbb{P}(D_2(L-Z_1) = i-j) + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j)\mathbb{P}(D_2(L-Z_1) = i-j).$$

In appendix C.2.2 hebben we laten zien dat $\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j)\mathbb{P}(D_2(L - Z_1) = i - j)$ een Poisson verdeling is met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1)$, als we dit gebruiken krijgen we:

$$\mathbb{V}_1 D(L) = \sum_{i=0}^{x_t} i \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1))^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1))}$$
$$+ \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \frac{\lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1))},$$

dus we verwachten om:

$$\mathbb{X}_1 D(L) = x_t - \mathbb{V}_1 D(L),$$

voorraad te hebben op moment van leveren.

De verwachte voorraad direct na het leveren van a besteleenheden is:

$$x_{t+L}(a) = \mathbb{X}_1 D(L) + aQ.$$

De verwachte nee-verkopen zijn:

$$\mathbb{C}_2(D(1), a) = \mathbb{E}max(0, D_2(Z_2-(L-Z_1))+D_3(Z_3)-x_{t+L}(a)) = max(0, \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(D(1) = i)-x_{t+L}(a)),$$

waarbij nog $Z_2 - (L - Z_1)$ tijdseenheden in dag 2 zitten en Z_3 tijdseenheden in dag 3.

$$= max(0, \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(D_2(Z_2 - (L - Z_1) + D_3(Z_3) = i) - x_{t+L}(a)).$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen is dit:

$$= max(0, \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_2(Z_2 - (L - Z_1) = j)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j) - x_{t+L}(a)).$$

In appendix C.2.2 laten we ook zien dat $\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_2(Z_2 - (L - Z_1) = j)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j)$ een Poisson verdeling is met verwachting $\lambda_2(Z_2-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3$, als we dit gebruiken krijgen we:

$$\mathbb{C}_2(D(1), a) = max(0, \lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3 - x_{t+L}(a)),$$

de verwachte kosten van nee-verkopen zijn dus:

$$C_2(1, a) = c\mathbb{C}_2(D(1), a)$$

De verwachte voorraadkosten voor levering (V_1) zijn:

$$V_1(L) = \frac{hL}{2}(2x_t - \mathbb{V}_1 D(L)).$$

De verwachte verkopen gedurende de volgende dag zijn:

$$\mathbb{V}_2(D(1), a) = \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i\mathbb{P}(D(1) = i) + \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a)\mathbb{P}(D(1) = i)$$

$$= \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i\mathbb{P}(D_2(Z_2 - (L - Z_1) + D_3(Z_3) = i) + \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a)\mathbb{P}(D_2(Z_2 - (L - Z_1) + D_3(Z_3) = i).$$

Wegens onafhankelijkheid van Poisson verdelingen is dit gelijk aan:

$$\sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_2(Z_2 - (L - Z_1) = j)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j)$$

$$+ \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a) \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_2(Z_2 - (L - Z_1) = j)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j).$$

In appendix C.2.2 hebben we laten zien dat $\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_2(Z_2 - (L - Z_1) = j)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j)$ een Poisson verdeling is met verwachting $\lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3$, als we dit gebruiken krijgen we:

$$\mathbb{V}_2(D(1), a) = \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i \frac{(\lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)}$$

$$+ \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a) \frac{(\lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)}.$$

Dan is de verwachte voorraad aan het eind van de dag:

$$\mathbb{X}_2(D(1), a) = x_{t+L}(a) - \mathbb{V}_2(D(1), a),$$

hiermee kunnen we de verwachte voorraadkosten na levering bepalen:

$$V_2(1, a) = \frac{h}{2}(2x_t - \mathbb{V}_2(D(1), a)).$$

De totale verwachte kosten zijn nu: $T(L + 1, a) = C_1(L) + C_2(1, a) + V_1(L) + V_2(1, a)$.

We bestellen niet als $T(L + 1) < T(L + 1, a)\ \forall a > 0$, anders bestellen we a eenheden zo dat $T(L + 1, a)$ minimaal is.

Voorbeeld

We nemen de aan dat:

- De winkel is 12 uur open, dit is 1 tijdseenheid.
- De levertijd is 7 uur, dit is $L = \frac{7}{12}$ tijdseenheden.
- $\lambda_1 = 5$ artikelen per dag.
- $\lambda_2 = 6$ artikelen per dag.
- $Z_1 = \frac{9}{12}$ tijdseenheden.
- $Z_2 = \frac{L+1-Z_1}{12} = \frac{10}{12}$ tijdseenheden.
- De besteleenheid is 6 artikelen, $BE = 6$.
- De kosten van nee-verkopen is 3 euro per artikel.
- De vooraadkosten zijn 2 euro per artikel per uur.
- De voorraad op het bestelmoment is $x_t = 5$.

Dan kunnen we berekenen wat de kosten zijn als we a besteleenheden bestellen.

a	$C_1(L)$	$V_1(L)$	$C_2(1,a)$	$V_2(1,a)$	$T(L+1,a)$
0	0.00	0.34	15.00	0.17	15.51
1	0.00	0.34	0.00	0.83	1.17
2	0.00	0.34	0.00	1.75	2.09
3	0.00	0.34	0.00	2.75	3.09
4	0.00	0.34	0.00	3.75	4.09

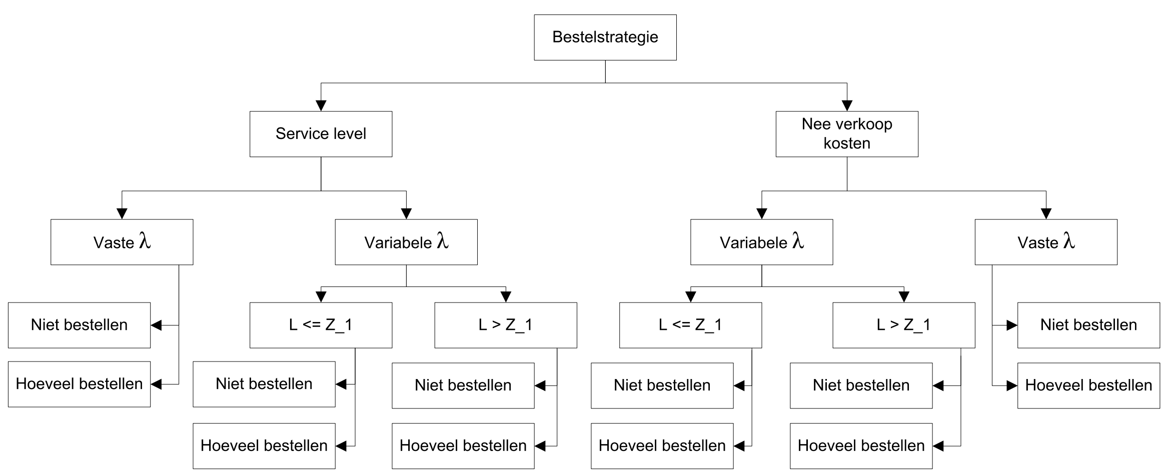
We zien dat bij het bestellen van $a = 1$ besteleenheid de kosten minimaal zijn.

Het verschil tussen de totale kosten bij het bestellen van $a = 0$ besteleenheden en de totale kosten bij niet bestellen komt door afrondingen.

18 Conclusie

Er blijkt weinig toepasbare theorieën te zijn over bestelregels in de retail. De formules over bestelregels in dit werkstuk staan niet in boeken, maar zijn gebaseerd op de theorie van het continue (s, Q) model en het periodieke (s, S) model (Hoofdstuk 3 uit [1], Hoofdstuk 6 uit [3], Hoofdstuk 1 uit [4], Hoofdstuk 7 uit [5], Hoofdstuk 6.4 uit [6], Hoofdstuk 7.5 uit [7] en Hoofdstuk 8.6 uit [8]). In het (s, Q) model wordt zodra de voorraad het niveau s bereikt Q artikelen besteld. In het periodieke (s, S) model wordt gekeken of op het bestelmoment de voorraad minder is dan s. Als dit het geval is dan wordt S - de huidige voorraad besteld. Een combinatie van deze 2 modellen; een periodiek model dat als er minder dan s artikelen op voorraad is op het bestelmoment, er dan Q eenheden worden besteld, wordt nauwelijks besproken.

We hebben de theorie besproken van een Poisson verdeelde vraag, nee-verkopen met behulp van een service level eis, nee-verkopen uitgedrukt in kosten en de bijbehorende bestelregels ontwikkeld. Dit kunnen we als volgt grafisch weergeven:



Om de bestelregels van de theorie te gebruiken moet er een kansverdeling worden verondersteld. Dit is niet altijd realistisch.

19 Samenvatting

In dit deel heb ik modellen besproken die berekenen hoeveel er op het bestelmoment besteld dient te worden. Hiervoor heb ik eerst een aantal aannames moeten maken:

- Iedere dag wordt besteld en geleverd.
- Bestellen gebeurd in zogenaamde besteleenheden.
- De levertijd is minder dan 1 dag.
- De artikelen zijn oneindig houdbaar.
- Als er geen voorraad is gaat de vraag verloren, er wordt niets nageleverd.
- De vaste bestelkosten zijn verwaarloosbaar.

We kunnen onderscheid maken in service level modellen en kosten modellen. Service level modellen eisen dat er een minimale service level wordt behaald. De service level modellen die ik bepsproken heb zijn een model voor een Poisson verdeelde vraag met een vaste λ en een model voor een Poisson verdeelde vraag met voor iedere dag een andere λ.
Hiervoor zijn de volgende variabelen gedefiniëerd:
λ: de verwachte vraag per tijdseenheid,
L: de levertijd,
Q: de besteleenheid.
Als tijdseenheid heb ik het aantal uur dat de winkel per dag open is genomen.

Als we gebruik maken van een service level model voor een Poisson verdeelde vraag met een vaste λ dan hoeven we niet te bestellen als geldt:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda(L+1))^i}{i!} e^{-\lambda(L+1)} \geq SL.$$

Voldoen we niet aan deze eis dan bestellen we a eenheden met a het eerste gehele getal (beginnend bij 1) waarvoor geldt:

$$\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda L)^j \lambda^{i-j}}{j!(i-j)!} e^{-\lambda(L+1)} \geq SL - \sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda(L+1))^i}{i!} e^{-\lambda(L+1)}.$$

Als we gebruik maken van een service level model voor een Poisson verdeelde vraag met voor iedere dag een andere λ moeten we onderscheid maken tussen twee situaties:

- Situatie 1: $L \leq Z_1$.
- Situatie 2: $L > Z_1$.

Met Z_1 het aantal tijdseenheden vanaf het bestelmoment tot sluitingstijd.

Als $L \leq Z_1$ moeten we rekening houden met twee dagen. Dag 1 telt Z_1 tijdseenheden en heeft verwachting λ_1 en dag 2 telt Z_2 tijdseenheden en heeft verwachting λ_2. Hierbij geldt $L + 1 = Z_1 + Z_2$ en zijn er nog $Z_1 - L$ tijdseenheden in dag 1 na levering.

We hoeven niet te bestellen als geldt:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)} \geq SL.$$

Voldoen we niet aan deze eis dan bestellen we a eenheden met a het eerste gehele getal (beginnend bij 1) waarvoor geldt:

$$\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 L)^j (\lambda_1 (Z_1 - L) + \lambda_2 Z_2)^{i-j}}{j!(i-j)!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)}$$

$$\geq SL - \sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)}.$$

Als $L > Z_1$ moeten we rekening houden met drie dagen. Dag 1 telt Z_1 tijdseenheden en heeft verwachting λ_1, dag 2 telt $Z_2 = 1$ tijdseenheid en heeft verwachting λ_2 en dag 3 telt Z_3 tijdseenheden en heeft verwachting λ_3. Hierbij geldt $L + 1 = Z_1 + Z_2 + Z_3$ dus $L = Z_1 + Z_3$ en zijn er nog $1 - (L - Z_1)$ tijdseenheden in dag 2 na levering.
We hoeven niet te bestellen als geldt:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)} \geq SL.$$

Voldoen we niet aan deze eis dan bestellen we a eenheden met a het eerste gehele getal (beginnend bij 1) waarvoor geldt:

$$\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 (L - Z_1))^j (\lambda_2 (1 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)^{i-j}}{j!(i-j)!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)}$$

$$\geq SL - \sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)}.$$

Als we gebruik maken van een kosten model proberen we de kosten van voorraad en neeverkoop te minimaliseren. De kosten modellen die ik bepsproken heb zijn een model voor een Poisson verdeelde vraag met een vaste λ en een model voor een Poisson verdeelde vraag met voor iedere dag een andere λ.
Hiervoor zijn de volgende variabelen gedefiniëerd:
λ: de verwachte vraag per tijdseenheid,
L= de levertijd,
Q= de besteleenheid,
c= de kosten van nee-verkoop per gemiste vraag,
$\mathbb{C}D(x)$= de verwachtte nee verkopen over x tijdseenheden, gegeven de vraag verdeling D,
$C(x)$ = verwachte kosten van nee-verkopen over x tijdseenheden,
$\mathbb{V}D(x)$= de verwachtte verkopen over x tijdseenheden, gegeven de vraag verdeling D,
$\mathbb{X}D(x)$= de verwachtte voorraad na x tijdseenheden, gegeven de vraag verdeling D,
$V(x)$ = gemiddelde voorraadkosten over x tijdseenheden,
$T(x)$ = totale kosten over x tijdseenheden.
x_t = de voorraad op het bestelmoment.

Als tijdseenheid heb ik het aantal uur dat de winkel per dag open is genomen.

Als we gebruik maken van een kosten model voor een Poisson verdeelde vraag met een vaste λ dan hebben we de volgende kosten bij het bestellen van a besteleenheden.

De kosten van nee-verkopen voor levering:

$$C_1(L) = c * \mathbb{E}max(0, D(L) - x_t).$$

De verwachte verkoop gedurende de levertijd:

$$\mathbb{V}_1 D(L) = \sum_{i=0}^{x_t} i \frac{(\lambda L)^i}{i!} e^{-\lambda L} + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \frac{(\lambda L)^i}{i!} e^{-\lambda L},$$

De voorraadkosten voor levering:

$$V_1(L) = \frac{hL}{2}(2x_t - \mathbb{V}_1 D(L)).$$

De kosten van nee-verkopen na levering:

$$C_2(1, a) = c * \mathbb{E}max(0, D(1) - x_t + \sum_{i=0}^{x_t} i \frac{(\lambda_1 L)^i}{i!} e^{-\lambda_1 L} + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \frac{(-\lambda_1 L)^i}{i!} e^{-\lambda_1 L} - aQ).$$

De verwachte verkoop gedurende de volgende dag:

$$\mathbb{V}_2(D(1), a) = \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} + \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a) \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

De voorraadkosten na levering:

$$V_2(1, a) = \frac{h}{2}(2x_{t+L}(a) - \mathbb{V}_2(D(1), a)).$$

De totale verwachte kosten zijn nu: $T(L+1, a) = C_1(L) + C_2(1, a) + V_1(L) + V_2(1, a)$.

We bestellen a besteleenheden zodanig dat de kosten minimaal zijn, hierbij kan $a = 0$ zijn.

Als we gebruik maken van een kosten model voor een Poisson verdeelde vraag met voor iedere dag een andere λ dan moeten we onderscheid maken tussen twee situaties:

- Situatie 1: $L \leq Z_1$.
- Situatie 2: $L > Z_1$.

Met Z_1 het aantal tijdseenheden vanaf het bestelmoment tot sluitingstijd.

Als $L \leq Z_1$ moeten we rekening houden met twee dagen. Dag 1 telt Z_1 tijdseenheden en heeft verwachting λ_1 en dag 2 telt Z_2 tijdseenheden en heeft verwachting λ_2. Hierbij geldt $L + 1 = Z_1 + Z_2$ en zijn er nog $Z_1 - L$ tijdseenheden in dag 1 na levering.

De kosten van nee-verkopen voor levering:

$$C_1(L) = c * \mathbb{E}max(0, D(L) - x_t).$$

De verwachte verkoop gedurende de levertijd:

$$\mathbb{V}_1 D(L) = \sum_{i=0}^{x_t} i \frac{(\lambda_1 L)^i}{i!} e^{-\lambda_1 L} + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \frac{(\lambda_1 L)^i}{i!} e^{-\lambda_1 L},$$

De voorraadkosten voor levering:

$$V_1(L) = \frac{hL}{2}(2x_t - \mathbb{V}_1 D(L)).$$

De kosten van nee-verkopen na levering:

$$C_2(1, a) = c * \mathbb{E}max(0, D(1) - x_t + \sum_{i=0}^{x_t} i \frac{(\lambda_1 L)^i}{i!} e^{-\lambda_1 L} + \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \frac{(\lambda_1 L)^i}{i!} e^{-\lambda_1 L} - aQ)).$$

De verwachte verkoop gedurende de volgende dag:

$$\mathbb{V}_2(D(1), a) = \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i \frac{(\lambda_1(Z_1 - L) + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)}$$

$$+ \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a) \frac{(\lambda_1(Z_1 - L) + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)}.$$

De voorraadkosten na levering:

$$V_2(1, a) = \frac{h}{2}(2x_t - \mathbb{V}_2(D(1), a)).$$

De totale kosten zijn nu:$T(L + 1, a) = C_1(L) + C_2(1, a) + V_1(L) + V_2(1, a)$.

We bestellen a besteleenheden zodanig dat de kosten minimaal zijn, hierbij kan $a = 0$ zijn.
Als $L > Z_1$ moeten we rekening houden met drie dagen. Dag 1 telt Z_1 tijdseenheden en heeft verwachting λ_1, dag 2 telt $Z_2 = 1$ tijdseenheid en heeft verwachting λ_2 en dag 3 telt Z_3 tijdseenheden en heeft verwachting λ_3. Hierbij geldt $L + 1 = Z_1 + Z_2 + Z_3$ dus $L = Z_1 + Z_3$ en zijn er nog $1 - (L - Z_1)$ tijdseenheden in dag 2 na levering.

De kosten van nee-verkopen voor levering:

$$C_1(L) = c * \mathbb{E}max(0, D_1(Z_1) + D_2(L - Z_1) - x_t).$$

De verwachte verkoop gedurende de levertijd:

$$\mathbb{V}_1 D(L) = \sum_{i=0}^{x_t} i \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1))^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1))}$$

$$+ \sum_{i=x_t+1}^{\infty} x_t \frac{\lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2(L - Z_1))},$$

De voorraadkosten voor levering:

$$V_1(L) = \frac{hL}{2}(2x_t - \mathbb{V}_1 D(L)).$$

De kosten van nee-verkopen na levering:

$$C_2(1,a) = c * \mathbb{E}max(0, D_2(Z_2 - (L - Z_1)) + D_3(Z_3) - ((x_t - \mathbb{V}_1 D(L)) + aQ)).$$

De verwachte verkoop gedurende de volgende dag:

$$\mathbb{V}_2(D(1),a) = \sum_{i=0}^{x_{t+L}(a)} i \frac{(\lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_2(Z_2-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)}$$

$$+ \sum_{i=x_{t+L}(a)+1}^{\infty} x_{t+L}(a) \frac{(\lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_2(Z_2-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)}.$$

De voorraadkosten na levering:

$$V_2(1,a) = \frac{h}{2}(2x_t - \mathbb{V}_2(D(1),a)).$$

De verwachte totale kosten zijn nu:$T(L+1,a) = C_1(L) + C_2(1,a) + V_1(L) + V_2(1,a)$.

We bestellen a besteleenheden zodanig dat de kosten minimaal zijn, hierbij kan $a = 0$ zijn.

A Een service level: Poisson verdeelde vraag met een vaste λ

We zoeken de minimale waarde van a waarvoor geldt:

$$\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\frac{(\lambda L)^j}{j!}e^{-\lambda L}\frac{\lambda^{i-j}}{(i-j)!}e^{-\lambda}+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda L)^j}{j!}e^{-\lambda L}\frac{\lambda^{i-j}}{(i-j)!}e^{-\lambda}\geq SL$$

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\frac{i!(\lambda L)^j\lambda^{i-j}}{i!j!(i-j)!}e^{-\lambda L-\lambda}+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda L)^j}{j!}e^{-\lambda L}\frac{\lambda^{i-j}}{(i-j)!}e^{-\lambda}\geq SL$$

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(\lambda L)^j\lambda^{i-j}\frac{1}{i!}e^{-\lambda(L+1)}+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda L)^j}{j!}e^{-\lambda L}\frac{\lambda^{i-j}}{(i-j)!}e^{-\lambda}\geq SL.$$

Nu kunnen we met behulp van het binomium van Newton dit herschrijven:

$$(x_1+x_2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_1^kx_2^{n-k}.$$

We krijgen dan:

$$\sum_{i=0}^{x_t}\frac{(\lambda(L+1))^i}{i!}e^{-\lambda(L+1)}+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda L)^j}{j!}e^{-\lambda L}\frac{\lambda^{i-j}}{(i-j)!}e^{-\lambda}\geq SL$$

$$=\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda L)^j\lambda^{i-j}}{j!(i-j)!}e^{-\lambda(L+1)}\geq SL-\sum_{i=0}^{x_t}\frac{(\lambda(L+1))^i}{i!}e^{-\lambda(L+1)}.$$

Dus we gaan a keer de besteleenheid bestellen, met voor a de kleinste integer waarvoor aan de bovenstaande eis wordt voldaan.

B Een service level: Poisson verdeelde vraag met een variabele λ

B.1 Situatie 1: $L \leq Z_1$

B.1.1 Wanneer niet bestellen

We hoeven niet te bestellen als geldt:

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!}e^{-\lambda_1 Z_1}*\frac{(\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{(i-j)!}e^{-\lambda_2 Z_2}\geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \frac{i!(\lambda_1 Z_1)^j (\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{i!j!(i-j)!} e^{-\lambda_1 Z_1} e^{-\lambda_2 Z_2} \geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (\lambda_1 Z_1)^j (\lambda_2 Z_2)^{i-j} \frac{1}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)} \geq SL.$$

Nu zijn $\frac{1}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)}$ onafhankelijk van j en $\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (\lambda_1 Z_1)^j (\lambda_2 Z_2)^{i-j}$ kunnen we met behulp van het binomium van Newton herschrijven:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)} \geq SL.$$

Dit is weer een Poisson verdeling met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$. We kunnen hiervan uitrekenen of deze aan de service level eis voldoet.

B.1.2 Hoeveel te bestellen

We zoeken de minimale waarde van a waarvoor geldt:

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 L)^j}{j!} e^{-\lambda_1 L} \sum_{k=0}^{i-j} \frac{(\lambda_1 (Z_1 - L))^k}{k!} e^{-\lambda_1 (Z_1 - L)} \frac{(\lambda_2 Z_2)^{i-j-k}}{(i-j-k)!} e^{-\lambda_2 Z_2}$$

$$+ \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 L)^j}{j!} e^{-\lambda_1 L} \sum_{k=0}^{i-j} \frac{(\lambda_1 (Z_1 - L))^k}{k!} e^{-\lambda_1 (Z_1 - L)} \frac{(\lambda_2 Z_2)^{i-j-k}}{(i-j-k)!} e^{-\lambda_2 Z_2} \geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 L)^j}{j!} e^{-\lambda_1 L} \sum_{k=0}^{i-j} \frac{(i-j)!(\lambda_1 (Z_1 - L))^k (\lambda_2 Z_2)^{i-j-k}}{(i-j)!k!(i-j-k)!} e^{-\lambda_1 (Z_1 - L) - \lambda_2 Z_2}$$

$$+ \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 L)^j}{j!} e^{-\lambda_1 L} \sum_{k=0}^{i-j} \frac{(i-j)!(\lambda_1 (Z_1 - L))^k (\lambda_2 Z_2)^{i-j-k}}{(i-j)!k!(i-j-k)!} e^{-\lambda_1 (Z_1 - L) - \lambda_2 Z_2} \geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 L)^j}{j!} e^{-\lambda_1 L} \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k} (\lambda_1 (Z_1 - L))^k (\lambda_2 Z_2)^{i-j-k} \frac{1}{(i-j)!} e^{-(\lambda_1 (Z_1 - L) + \lambda_2 Z_2)}$$

$$+ \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 L)^j}{j!} e^{-\lambda_1 L} \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k} (\lambda_1 (Z_1 - L))^k (\lambda_2 Z_2)^{i-j-k} \frac{1}{(i-j)!} e^{-(\lambda_1 (Z_1 - L) + \lambda_2 Z_2)} \geq SL.$$

Met behulp van het binomium van Newton krijgen we:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 L)^j}{j!} e^{-\lambda_1 L} \frac{(\lambda_1 (Z_1 - L) + \lambda_2 Z_2)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-(\lambda_1 (Z_1 - L) + \lambda_2 Z_2)}$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 L)^j}{j!}e^{-\lambda_1 L}\frac{(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{(i-j)!}e^{-(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)}\geq SL$$

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\frac{i!(\lambda_1 L)^j(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{i!j!(i-j)!}e^{-\lambda_1 L-(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)}$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 L)^j(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{j!(i-j)!}e^{-\lambda_1 L-(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)}\geq SL$$

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(\lambda_1 L)^j(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^{i-j}\frac{1}{i!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2)}$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 L)^j(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{j!(i-j)!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2)}\geq SL.$$

Nu kunnen we weer het binomium van Newton toepassen:

$$\sum_{i=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 L+\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^i}{i!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2)}$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 L)^j(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{j!(i-j)!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2)}\geq SL$$

$$=\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 L)^j(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{j!(i-j)!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2)}$$

$$\geq SL-\sum_{i=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2)^i}{i!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2)}.$$

Dus we gaan a keer de besteleenheid bestellen, met voor a de kleinste integer waarvoor aan de bovenstaande eis wordt voldaan.

B.2 Situatie 2: $L > Z_1$

B.2.1 Wanneer niet bestellen

We hoeven niet te bestellen als geldt:

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!}e^{-\lambda_1 Z_1}\sum_{k=0}^{j}\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{(\lambda_3 Z_3)^{i-j-k}}{(i-j-k)!}e^{-\lambda_3 Z_3}\geq SL$$

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!}e^{-\lambda_1 Z_1}\sum_{k=0}^{j}\frac{(i-j)!\lambda_2^k(\lambda_3 Z_3)^{i-j-k}}{(i-j)!k!(i-j-k)!}e^{-\lambda_2-\lambda_3 Z_3}\geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!} e^{-\lambda_1 Z_1} \sum_{k=0}^{j} \binom{i-j}{k} \lambda_2^k (\lambda_3 Z_3)^{i-j-k} \frac{1}{(i-j)!} e^{-(\lambda_2 + \lambda_3 Z_3)} \geq SL.$$

Met behulp van het binomium van Newton kunnen we dit herschrijven tot:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!} e^{-\lambda_1 Z_1} \frac{(\lambda_2 + \lambda_3 Z_3)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-(\lambda_2 + \lambda_3 Z_3)} \geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \frac{i!(\lambda_1 Z_1)^j (\lambda_2 + \lambda_3 Z_3)^{i-j}}{i! j! (i-j)!} e^{-\lambda_1 Z_1} e^{-(\lambda_2 + \lambda_3 Z_3)} \geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (\lambda_1 Z_1)^j (\lambda_2 + \lambda_3 Z_3)^{i-j} \frac{1}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)} \geq SL.$$

Met behulp van het binomium van Newton kunnen we dit verder herschrijven tot:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)} \geq SL.$$

Dit is weer een Poisson verdeling met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3$. We kunnen hiervan uitrekenen of dit aan de service level eis voldoet.

B.2.2 Hoeveel te bestellen

We zoeken de minimale waarde van a waarvoor geldt:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{j} \frac{(\lambda_1 Z_1)^k}{k!} e^{-\lambda_1 Z_1} \frac{(\lambda_2 (L - Z_1))^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda_2 (L - Z_1)}$$

$$* \sum_{l=0}^{i-j} \frac{(\lambda_2 (1 - (L - Z_1)))^l}{l!} e^{-\lambda_2 (1 - (L - Z_1))} \frac{(\lambda_3 Z_3)^{i-j-l}}{(i-j-l)!} e^{-\lambda_3 Z_3}$$

$$+ \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \sum_{k=0}^{j} \frac{(\lambda_1 Z_1)^k}{k!} e^{-\lambda_1 Z_1} \frac{(\lambda_2 (L - Z_1))^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda_2 (L - Z_1)}$$

$$* \sum_{l=0}^{i-j} \frac{(\lambda_2 (1 - (L - Z_1)))^l}{l!} e^{-\lambda_2 (1 - (L - Z_1))} \frac{(\lambda_3 Z_3)^{i-j-l}}{(i-j-l)!} e^{-\lambda_3 Z_3} \geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{j} \frac{j!(\lambda_1 Z_1)^k (\lambda_2 (L - Z_1))^{j-k}}{j! k! (j-k)!} e^{-\lambda_1 Z_1 - \lambda_2 (L - Z_1)}$$

$$*\sum_{l=0}^{i-j}\frac{(i-j)!(\lambda_2(1-(L-Z_1)))^l(\lambda_3 Z_3)^{i-j-l}}{(i-j)!l!(i-j-l)!}e^{-\lambda_2(1-(L-Z_1))-\lambda_3 Z_3}$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\sum_{k=0}^{j}\frac{j!(\lambda_1 Z_1)^k(\lambda_2(L-Z_1))^{j-k}}{j!k!(j-k)!}e^{-\lambda_1 Z_1-\lambda_2(L-Z_1)}$$

$$*\sum_{l=0}^{i-j}\frac{(i-j)!(\lambda_2(1-(L-Z_1)))^l(\lambda_3 Z_3)^{i-j-l}}{(i-j)!l!(i-j-l)!}e^{-\lambda_2(1-(L-Z_1))-\lambda_3 Z_3}\geq SL$$

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(\lambda_1 Z_1)^k(\lambda_2(L-Z_1))^{j-k}\frac{1}{j!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))}$$

$$*\sum_{l=0}^{i-j}\binom{i-j}{l}(\lambda_2(1-(L-Z_1)))^l(\lambda_3 Z_3)^{i-j-l}\frac{1}{(i-j)!}e^{-(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)}$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(\lambda_1 Z_1)^k(\lambda_2(L-Z_1))^{j-k}\frac{1}{j!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))}$$

$$*\sum_{l=0}^{i-j}\binom{i-j}{l}(\lambda_2(1-(L-Z_1)))^l(\lambda_3 Z_3)^{i-j-l}\frac{1}{(i-j)!}e^{-(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)}\geq SL.$$

Nu gebruiken we het binomium van Newton:

$$\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\frac{(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))^j}{j!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))}$$

$$*\frac{(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)^{i-j}}{(i-j)!}e^{-(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)}$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))^j}{j!}e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))}$$

$$*\frac{(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)^{i-j}}{(i-j)!}e^{-(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)}\geq SL$$

$$=\sum_{i=0}^{x_t}\sum_{j=0}^{i}\frac{i!(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))^j(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)^{i-j}}{i!j!(i-j)!}$$

$$*e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))-(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)}$$

$$+\sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ}\sum_{j=0}^{x_t}\frac{(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))^j(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)^{i-j}}{j!(i-j)!}$$

$$*e^{-(\lambda_1 Z_1+\lambda_2(L-Z_1))-(\lambda_2(1-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)}\geq SL$$

$$= \sum_{i=0}^{x_t} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 (L - Z_1))^j (\lambda_2 (1 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)^{i-j} \frac{1}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)}$$

$$+ \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 (L - Z_1))^j (\lambda_2 (1 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)^{i-j}}{j!(i-j)!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)} \geq SL.$$

Hier gebruiken we nogmaals het binomium van Newton:

$$\sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)}$$

$$+ \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 (L - Z_1))^j (\lambda_2 (1 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)^{i-j}}{j!(i-j)!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)} \geq SL$$

$$= \sum_{i=x_t+1}^{x_t+aQ} \sum_{j=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 (L - Z_1))^j (\lambda_2 (1 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)^{i-j}}{j!(i-j)!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)}$$

$$\geq SL - \sum_{i=0}^{x_t} \frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 + \lambda_3 Z_3)}.$$

De eerste a waarvoor aan de bovenstaande vergelijking wordt voldaan is het aantal besteleenheden dat we zullen gaan bestellen.

C Kosten: een Poisson verdeling met variabele λ

C.1 Situatie 1: $L \leq Z_1$

C.1.1 Kosten bij niet bestellen

We willen berekenen:

$$\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j) \mathbb{P}(D_2(Z_2) = i - j)$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!} e^{-\lambda_1 Z_1} \frac{(\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\lambda_2 Z_2}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \frac{i!(\lambda_1 Z_1)^j (\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{i!j!(i-j)!} e^{-\lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (\lambda_1 Z_1)^j (\lambda_2 Z_2)^{i-j} \frac{1}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)}.$$

Hier gebruiken we het binomium van Newton:

$$\frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)}.$$

Dit is een Poisson verdeling met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$.

C.1.2 Kosten bij wel bestellen

We willen berekenen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1 - L) = j)\mathbb{P}(D_2(Z_2) = i - j) \\
&= \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1(Z_1 - L))^j}{j!} e^{-\lambda_1(Z_1-L)} \frac{(\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\lambda_2 Z_2} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \frac{i!(\lambda_1(Z_1 - L))^j (\lambda_2 Z_2)^{i-j}}{i!j!(i-j)!} e^{-\lambda_1(Z_1-L)-\lambda_2 Z_2} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (\lambda_1(Z_1 - L))^j (\lambda_2 Z_2)^{i-j} \frac{1}{i!} e^{-(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)}.
\end{aligned}$$

Hier gebruiken we het binomium van Newton:

$$\frac{(\lambda_1(Z_1 - L) + \lambda_2 Z_2)^i}{i!} e^{-(\lambda_1(Z_1-L)+\lambda_2 Z_2)}.$$

Dit is een Poisson verdeling met verwachting $\lambda_1(Z_1 - L) + \lambda_2 Z_2$.

C.2 Situatie 2: $L > Z_1$

C.2.1 Kosten bij niet bestellen

We willen berekenen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j) \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}(D_2(Z_2) = k)\mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j - k) \\
&= \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!} e^{-\lambda_1 Z_1} \sum_{k=0}^{j} \frac{(\lambda_2 Z_2)^k}{k!} e^{-\lambda_2 Z_2} \frac{(\lambda_3 Z_3)^{i-j-k}}{(i-j-k)!} e^{-\lambda_3 Z_3} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!} e^{-\lambda_1 Z_1} \sum_{k=0}^{j} \frac{(i-j)!(\lambda_2 Z_2)^k (\lambda_3 Z_3)^{i-j-k}}{(i-j)!k!(i-j-k)!} e^{-\lambda_2 Z_2 - \lambda_3 Z_3} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!} e^{-\lambda_1 Z_1} \sum_{k=0}^{j} \binom{i-j}{k} (\lambda_2 Z_2)^k (\lambda_3 Z_3)^{i-j-k} \frac{1}{(i-j)!} e^{-(\lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)}.
\end{aligned}$$

Hier gebruiken we het binomium van Newton:

$$\sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!} e^{-\lambda_1 Z_1} \frac{(\lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-(\lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \frac{i!(\lambda_1 Z_1)^j (\lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)^{i-j}}{i!j!(i-j)!} e^{-\lambda_1 Z_1 - (\lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (\lambda_1 Z_1)^j (\lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)^{i-j} \frac{1}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)}.$$

Hier gebruiken we nogmaals het binomium van Newton:

$$\frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3)}.$$

Dit is een Poisson verdeling met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3$.

C.2.2 Kosten bij wel bestellen

We willen berekenen:

$$\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_1(Z_1) = j) \mathbb{P}(D_2(L - Z_1) = i - j)$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_1 Z_1)^j}{j!} e^{-\lambda_1 Z_1} \frac{(\lambda_2 (L - Z_1))^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\lambda_2 (L - Z_1)}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \frac{i!(\lambda_1 Z_1)^j (\lambda_2 (L - Z_1))^{i-j}}{i!j!(i-j)!} e^{-\lambda_1 Z_1 - \lambda_2 (L - Z_1)}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (\lambda_1 Z_1)^j (\lambda_2 (L - Z_1))^{i-j} \frac{1}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 (L - Z_1))}.$$

Hier gebruiken we het binomium van Newton:

$$\frac{(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 (L - Z_1))^i}{i!} e^{-(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 (L - Z_1))}.$$

Dit is een Poisson verdeling met verwachting $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 (L - Z_1)$.

We willen berekenen:

$$\sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(D_2(Z_2 - (L - Z_1) = j) \mathbb{P}(D_3(Z_3) = i - j)$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \frac{(\lambda_2 (Z_2 - (L - Z_1)))^j}{j!} e^{-\lambda_2 (Z_2 - (L - Z_1))} \frac{(\lambda_3 Z_3)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\lambda_3 Z_3}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \frac{i!(\lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)))^j (\lambda_3 Z_3)^{i-j}}{i!j!(i-j)!} e^{-\lambda_2(Z_2-(L-Z_1))-\lambda_3 Z_3}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (\lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)))^j (\lambda_3 Z_3)^{i-j} \frac{1}{i!} e^{-(\lambda_2(Z_2-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)}.$$

Hier gebruiken we het binomium van Newton:

$$\frac{(\lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3)^i}{i!} e^{-(\lambda_2(Z_2-(L-Z_1))+\lambda_3 Z_3)}.$$

Dit is een Poisson verdeling met verwachting $\lambda_2(Z_2 - (L - Z_1)) + \lambda_3 Z_3$.

Referenties

[1] S. Axsäter: *Inventory control*, Kluwer academic publishers, International series in Operation Research & Management Science, 2000

[2] A.C. Hax, D. Candea: *Production and inventory management*, Prentice Hall, 1984

[3] P.H. Zipkin: *Foundations of inventory management*, McGraw-Hill higher education, 2000

[4] S.C. Graves, A.H.G. Rinnooy Kan, P.H. Zipkin: *Logistics of production and inventory*, Handbooks in Operation Research & Management Science, Volume 4, 1993

[5] E.A. Silver, R. Peterson: *Decision systems for inventory management and production planning*, John Wiley & Sons , Second edition, 1979

[6] H.C. Tijms, E.M.F. Kalvelagen: *Modelbouw in de operations research*, Academic service, 1994

[7] H.M. Visser, A.R. van Goor: *Werken met logistiek*, Stenfert Kroese, Derde druk, 1999

[8] A.R. van Goor, M.J. Ploos van Amstel, W. Ploos van Amstel: *Fysieke distributie: denken in toegevoegde waarde*, Stenfert Kroese, Vierde druk, 1999

[9] Interviews met: *Dhr. Vendrig en Dhr. van Lunteren*, afdeling Replenishment preperation, Albert Heijn, september 2004