Dynamisch Prijzen

Nick Groen

Research paper Business Analytics

Dynamisch Prijzen
Nick Groen
Research Paper Business Analytics

Begeleider: Sandjai Bhulai

Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081
1081 HV Amsterdam
Nederland

22 november 2012

Voorwoord

Dit research paper is onderdeel van mijn masteropleiding Business Analytics. Binnen deze master is het schrijven van een research paper een verplicht onderdeel. In het paper moeten de facetten bedrijfskunde, wiskunde, en informatica van de opleiding zijn terug te vinden. Een ander belangrijk aspect van het paper is dat het toegepaste waarde heeft in de praktijk.

Het probleem dat ik in dit paper zal bespreken is: dynamisch prijzen met als toepassingsgebied de detailhandel. Dit probleem bevat de vereiste facetten van de studie, namelijk het bedrijfskundige facet omdat het dynamisch prijzen echt een bedrijfsprobleem is, het wiskundige facet omdat het dynamisch prijzen terug is te brengen tot een wiskundig model, en het informatica facet is terug te vinden in het analyseren van de modellen door middel van simulatie.

Dat dynamisch prijzen praktijkwaarde heeft is duidelijk, het concept bestaat al decennia. Het wordt echter altijd in verband gebracht met de vliegtuigindustrie, terwijl de retailindustrie nog nauwelijks gebruik maakt van het dynamisch prijzen van producten. Om de retailindustrie vooruit te helpen met het toepassen van dynamisch prijzen heb ik dit onderzoek uitgevoerd en dit paper geschreven.

Ik bedank mijn begeleider dr. Sandjai Bhulai voor zijn tijd en coaching. Ik heb veel gehad aan de momenten waarin we samen discusiseerde over de problemen die ik tegen kwam tijdens mijn onderzoek. Tevens wil ik mijn mede-student en goede vriend Nivard van Wijk bedanken voor het meedenken op sommige punten. De discussies die we hebben gevoerd hebben me verder gebracht in mijn onderzoek en hebben me tot nieuwe inzichten laten komen. Ook wil ik dr. Fetsje Bijma en prof. dr. Matisca de Gunst bedanken voor het oplossen van een van de problemen waar ik tegen aan liep.

Oktober 2012
Nick Groen

Samenvatting

Het prijzen van producten werd eeuwen lang door deskundigen gedaan. Aan het einde van de eenentwintigste eeuw is met de komst van de computer vraag gekomen naar modellen die op basis van data de prijzen kiezen die de opbrengst optimaliseren. Vele wetenschappers hebben modellen ontwikkeld die de prijzen van producten berekenen. In het boek van Talluri en van Ryzin [5] wordt een overzicht gegeven van modellen die in de praktijk gebruikt worden. Een voorbeeld hiervan is het deterministische model waarbij wordt uitgegaan van een vast aantal klanten per periode. In werkelijkheid is de vraag niet statisch maar juist dynamisch. Dit heeft geleid tot een hele andere groep van modellen: de dynamische modellen. Deze worden ook beschreven in het boek van Talluri en van Ryzin maar worden beter beschreven door het artikel van Bitran en Mondschein [2].

De modellen zijn afhankelijk van enkele input parameters die over het algemeen onbekend zijn. Daarom zou een model dat de parameter kan leren een beter model kunnen opleveren. Levina en anderen [4] hebben een manier ontwikkeld om de kans te leren dat in een periode een klant het product koopt. Dit heeft aanleiding gegeven om een model te ontwikkelen dat leert hoeveel producten worden verkocht in een periode en daarbij de beste prijs geeft.

Het startmodel is een dynamisch model maar hebben daar verbeteringen in aangebracht. We hebben aangenomen dat de vraag Poisson verdeeld is, wat vaak overeenkomt met de praktijk. Deze verdeling geeft de kans op een bepaalde vraag, echter moet daarvoor de gemiddelde vraag bekend zijn. Dit kan worden geschat aan de hand van historische data. Dit is echter niet mogelijk met nieuwe producten. Ook bij producten die een tijd niet zijn verkocht omdat ze bijvoorbeeld alleen in een bepaald seizoen worden verkocht, is het niet duidelijk wat de historische data zegt over de verkopen in de toekomst. Een model dat de parameter leert zou dit oplossen want deze gebruikt data die lopende de verkoop wordt verkregen.

Om de parameter te leren wordt gebruik gemaakt van een Bayesiaanse manier van leren waarbij geconjugeerde verdelingen worden toegepast om het leren eenvoudig te houden. We nemen aan dat de parameter verdeeld is volgens een bepaalde verdeling, in combinatie met de Poisson verdeling is dit de Gamma verdeling, en stellen de onbekende parameter gelijk aan de verwachting van de aangenomen verdeling. Deze Gamma verdeling heeft twee parameters α en β die respectievelijk de geschatte vraag en de tijdsperiode voorstellen. Voor α wordt dus een schatting gemaakt van de geschatte vraag en β begint op 1. Na een periode van verkoop wordt α opgehoogd met het aantal verkopen en β met één verhoogd. Dit geeft een nieuwe parameter voor de vraagverdeling en zo kan een nieuwe prijs worden berekend voor de volgende periode. Deze stappen herhalen zich zolang het product in de winkel ligt.

De vraag kan nu worden geleerd, alleen deze is niet prijsafhankelijk. Om de vraag wel prijsafhankelijk te maken stellen we een formule op voor de parameter van de vraagverdeling. De vraag stellen we lineair afhankelijk van de prijs, wat resulteert in $\theta = a \times p + b$. De parameter a, aantal klanten extra als de prijs met 1 euro stijgt, kan

worden geschat aan de hand van data van soortgelijke producten. De parameter b kan worden geleerd met de eerder beschreven geconjugeerde verdeling. Het updaten van de α moet in dit geval niet met de werkelijke verkoop verhoogd worden maar met $x - a \times p$, waar x de werkelijke verkoop is.

Om het model te testen is een experiment uitgevoerd waarbij de vraag uit een Poisson verdeling wordt getrokken met een bekende parameter. Eerst is gekeken naar de invloed van de startparameter α in het model. Dit is gedaan door de opbrengsten uit het model met elkaar te vergelijken wanneer met verschillende waarden wordt gestart. Het resultaat geeft dat wanneer niet te veel wordt afgeweken van de werkelijke parameter(± 5), de opbrengst minder dan 10% afwijkt van wanneer met de juiste parameter was gestart.

Vervolgens is gekeken naar de werking van het model ten opzichte van het dynamische model en het deterministische model. Het ontwikkelde lerende model komt dicht in de buurt van het dynamische model. De opbrengst is gemiddeld 0,15% lager dan het dynamische model. De vergelijking met het deterministische model leverde een gemiddelde winst van 8% op voor het lerende model. Dit betekent dat het ontwikkelde model tussen de modellen in zit maar bijna dezelfde opbrengsten geeft als het dynamische model. Het voordeel is echter dat het lerende model niet de juiste parameter nodig heeft, en de andere twee modellen deze wel nodig hebben. De vraag is in de praktijk echter nooit bekend, dus is het lerende model een beter alternatief omdat het de vraag leert.

Om nog betere resultaten te krijgen dient ook de parameter a geleerd te worden. Bayesiaans leren met geconjugeerde verdelingen is echter niet eenvoudig toe te passen voor twee onbekende parameters. Om dit mogelijk te maken is verder onderzoek nodig.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

Het prijzen van producten is al zo oud als de weg naar Rome. Al in de oudheid dacht men na over hoeveel schapen een koe waard was. Sinds de invoering van het geld is dit veranderd in hoeveel muntstukken iets waard is. Tegenwoordig ruilt men geen waar meer en koopt ook geen producten meer bij elkaar. Producten worden tegenwoordig gekocht bij een retailorganisatie. Deze bedrijven vragen zich steeds af tegen welke prijs ze hun producten moeten aanbieden om een zo groot mogelijke opbrengst te genereren.

Het vaststellen van een prijs werd in het verleden op het gevoel gedaan. Met de opkomst van de informatietechnologie is er echter vraag gekomen om het prijzen te doen op basis van gegevens uit het verleden. Uit de vraag naar kwantitatieve modellen zijn revenue management modellen komen overwaaien uit de vliegtuigbranche. Dit vakgebied onder de naam Dynamisch Prijzen heeft sinds die tijd veel aandacht gekregen van onderzoekers. De technieken worden in de praktijk echter nog weinig toegepast, dus werken de modellen blijkbaar nog niet goed genoeg. In dit paper wordt een poging gedaan om het dynamisch prijzen van seizoensproducten zonder de mogelijkheid tot het nabestellen van de producten te vereenvoudigen en te verbeteren.

Het probleem waar we ons op richten is het vaststellen van de prijs in elke periode voor een enkel product. Dit product heeft een startvoorraad van C producten en er kan tijdens de verkoop van dit product niet nabesteld worden. In de praktijk komt dit voor bij seizoensproducten waarbij voor het seizoen een partij wordt gekocht en deze gedurende een bepaalde periode verkocht wordt. Een voorbeeld van zo´n product zijn schaatsen. Er geldt bij dit probleem dat de opbrengsten nul zijn nadat er C producten zijn verkocht of het aantal periodes T verstreken is. We proberen dit probleem op te lossen door de opbrengst van de verkoop te maximaliseren.

Dit probleem is in zijn meest versimpelde vorm op te lossen met een deterministisch model. Dit lineaire programmeringsmodel wordt onder andere beschreven door Talluri en van Ryzin [5].

Een andere manier om het probleem op te lossen is door gebruik te maken van een dynamisch model. Dit model met een stochastische vraag wordt onder andere gepresenteerd door Bitran en Mondschein [2]. Een andere manier om tegen het dynamische model aan te kijken is met een Bernoulli vraag. Dit wordt uitgebreid besproken in het boek van Talluri en van Ryzin [5]. Levina e.a. [4] zijn aan de slag gegaan met dit Bernoulli model om de kans dat een product wordt verkochtl te leren met behulp van de stelling van Bayes. Dit geeft een eenvoudige manier om de onbekendheid in het model te leren zonder daar data uit het verleden voor nodig te hebben.

Dit onderzoek gaat verder met de bovenstaande modellen en probeert een verbetering te vinden. Het probeert de sterke punten van de modellen samen te voegen tot een realistisch model dat in de praktijk eenvoudig gebruikt kan worden. Het doel van het onderzoek is om een stochastisch model te ontwikkelen dat de onbekende parameter leert op een eenvoudige manier, zodat voor elk tijdstip t een optimale prijs kan worden vastgesteld. Vervolgens wordt gekwantificeerd wat het leren van de onbekende parameter in dit model kost ten opzichte van de andere modellen.

In hoofdstuk 2 wordt een theoretisch kader geschetst met een beschrijving van de deterministische en dynamische modellen. Deze modellen dienen ook als vergelijkingsmateriaal voor het te ontwikkelen model. In hoofdstuk 3 wordt vervolgens een nieuw model geïntroduceerd. In hoofdstuk 4 zal het ontwikkelde model worden vergeleken met de andere modellen. Hoofdstuk 5 zal ten slotte de impact van dit onderzoek bespreken en richting geven aan vervolgonderzoek. In de appendix is de pseudo-code van het model opgenomen.

Hoofdstuk 2

Bestaande modellen

Om een goed beeld te krijgen hoe het probleem kan worden aangepakt, wordt in dit hoofdstuk een overzicht gegeven van de modellen die door anderen zijn ontwikkeld. Een analyse van de bestaande modellen geeft zo een basis voor verder onderzoek op het gebied van dynamisch prijzen.

2.1 Modelleren

Om de opbrengst van een product te kunnen maximaliseren zijn er aannamen nodig. Deze aannamen zorgen ervoor dat het probleem eenvoudiger is dan in werkelijkheid zodat het te modelleren valt. Tegelijkertijd moeten de aannamen de werkelijkheid niet zodanig vereenvoudigen dat de uitkomst van het model niet meer toepasbaar is in de praktijk.

De eerste aanname is dat wordt gekeken naar één product. In werkelijkheid heeft het veranderen van de prijs van product A invloed op de vraag naar datzelfde product, maar mogelijk ook op de vraag naar product B. Deze verbanden tussen producten worden niet meegenomen in de modellen. Deze vereenvoudiging geeft geen enkel verschil wanneer wordt gekeken naar één product, echter zal de beste prijs vaak voor het hele assortiment worden berekend en dan kan de vraag verkeerd ingeschat worden bij veranderingen in prijs van andere producten.

Een tweede aanname is dat het bedrijf zich in een monopoliepositie bevindt. Dit lijkt een onrealistische aanname omdat in werkelijkheid elk bedrijf verschillende concurrenten heeft, zeker in de retail. Dit is geen probleem want het gaat hier om de mogelijkheid tot het zetten van prijzen. Wanneer de prijzen van alle producten nagenoeg vaststaan vanwege de grote concurrentie, is het onverstandig de prijs te veranderen aangezien bij een stijging vele klanten naar de concurrent gaan en bij een daling de concurrenten ook de prijs zullen verlagen en er dus minder omzet zal worden gehaald.

Een derde aanname betreft het aantal potentiële klanten dat er voor een product is. We nemen aan dat dit een oneindig aantal klanten is terwijl in werkelijkheid elke populatie eindig is. In theorie is de populatie oneindig wanneer klanten die een product gekocht hebben, direct weer tot de mogelijke klanten behoren. Dit maakt het analytisch eenvoudiger omdat de historie van verkopen niet bijgehouden hoeft te worden. Dit is vaak in de praktijk ook niet mogelijk omdat de klanten niet bekend zijn. Een oneindige populatie wordt daarom in de praktijk vaak gebruikt.

De vierde aanname gaat over het nabestellen van producten. Aangenomen wordt dat het niet mogelijk is om producten na te bestellen. Dit is in de praktijk niet bij alle producten het geval, maar wel vaak bij seizoensartikelen die maar een klein aantal weken in een winkel liggen. Van dit product wordt dan één partij gekocht en daar moet dan het hele seizoen mee worden gedaan. Talluri en van Ryzin [5] hebben in hun boek over revenue management ook modellen beschreven die wel rekening houden met de mogelijkheid tot nabestellen van producten.

De laatste aanname heeft betrekking op het koopgedrag van klanten. Om het koopgedrag te modelleren moet er iets bekend zijn over wanneer potentiële klanten een product zouden kopen. Hierin zijn twee mogelijke keuzes: de bijziende klant of de strategische klant. Een bijziende klant koopt het product wanneer de prijs van het product kleiner dan of gelijk is aan de reserveringsprijs van de klant. De strategische klant wacht met kopen tot dat voor die klant de prijs-kwaliteit verhouding het grootst is. Speltheorie dient in dit geval voor elke klant toegepast te worden om het verkoopmoment te bepalen. Dit is echter in de praktijk vaak niet mogelijk, dus een bijziende klant word aangenomen om het analytisch benaderen van het probleem mogelijk te maken.

Ondanks deze aannamen, die de werkelijkheid een stuk eenvoudiger maken, zijn de modellen met deze aannames nogsteeds relevant voor de praktijk. Deze modellen worden gebruikt voor seizoens- en modeproducten.

2.2 Deterministisch model

Talluri en van Ryzin [5] beschrijven het meest eenvoudige model om het probleem van dynamisch prijzen op te lossen. Dit is een deterministisch model geformuleerd in termen van de vraag. De optimale vraag $d^*(t,p)$ moet voldoen aan model 2.1.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=1}^{T} r(t, d(t,p)) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{t=1}^{T} d(t,p) \leq C \\ & d(t,p) \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

In dit model zijn de parameters T, C, en p respectievelijk het aantal tijdsperiodes, het voorraadniveau, en de prijs van het product. De functie $r(t, d(t,p))$ geeft de opbrengst van de verkoop van $d(t,p)$ producten op tijdstip t. De functie $d(t,p)$ is de vraagfunctie, en geeft de vraag op tijdstip t bij een prijs p.

Voor gebruik van dit model dient voor elke periode een vraagformule te worden opgesteld dat afhankelijk is van de prijs van het product. Vaak wordt hier gekozen voor een lineair verband tussen prijs en vraag. Een groot nadeel van dit model is dat de prijzen vastliggen en dus bij een eventueel afwijkende vraag niet meer kunnen worden aangepast.

Om het model te verduidelijken geeft een voorbeeld een duidelijk beeld wat het model doet. Stel een winkel gaat product X verkopen en heeft een voorraad van 50 producten. Het product wordt gedurende 2 weken verkocht met voor de eerste periode een vraagfunctie van $d_1 = 45 - p_1$ en voor de tweede periode $d_2 = 30 - p_2$. De vraag is nu welke prijzen dienen te worden gevraagd in deze periodes.

Dit voorbeeld is eenvoudig op te lossen met een tabel waarbij de vraag naar de producten in de periodes gezamenlijk de volledige voorraad van vijftig opmaakt. Tabel 2.1 geeft de uitkomst van het model weer. Hieruit blijkt dat in de eerste periode een prijs van 16 gewenst is en in de tweede periode een prijs van 9. Dit levert dan de maximale opbrengst op van 653.

Tabel 2.1: Voorbeeld van deterministisch model

$d(1, p_1)$	$d(2, p_2)$	p_1	p_2	Revenue
32	18	13	12	632
31	19	14	11	643
30	20	15	10	650
29	21	16	9	653
28	22	17	8	652
27	23	18	7	647
26	24	19	6	638

2.3 Dynamische modellen

Dynamische modellen zijn van een andere aard dan het deterministische model. Er wordt geen gebruik gemaakt van lineair programmeren maar van dynamisch programmeren. Er zijn binnen de dynamische modellen verschillende manieren om tegen het probleem aan te kijken. Er wordt gekeken naar de hoeveelheid producten die wordt afgenomen in een bepaalde periode, bijvoorbeeld een week. Dit wordt beschreven in een model met stochastische vraag. Een andere mogelijkheid is door te kijken naar het verkopen van één enkel product in een periode. Voor elke periode wordt zo gekeken of er wel of geen product wordt verkocht. Er moet voor dit model dus naar kleine tijdseenheden worden gekeken.

Voor alle dynamische modellen gelden een aantal restricties. Er is een eindig aantal prijzen die kunnen worden toegepast in een periode en deze zitten in de verzameling π. Voor elke periode geldt dat er geen opbrengst meer kan worden gegenereerd als er geen voorraad meer is ($R(t, 0) = 0$). Ook moet gelden dat wanneer het aantal tijdsperiodes is verstreken, er geen opbrengst meer kan worden gegenereerd ($R(T, y) = 0$). $(y - d)^+$ wordt gebruikt om aan te geven dat het maximum moet worden genomen tussen $y - d$ en 0, omdat de voorraad niet negatief kan zijn in werkelijkheid.

2.3.1 Stochastische vraag

Bitran en Mondschein [2] en Talluri en Van Ryzin [5] beschrijven in beide publicaties een model met stochastische vraag. In het geval van stochastische vraag kan de opbrengstfunctie $R(t, y)$ met t de periode en y de voorraad worden beschreven als in formule 2.2. Dit geeft echter alleen de verwachtte opbrengst van de verkoop van dit product. Om hier de bijbehorende prijzen in elke periode te achterhalen dient te worden bijgehouden welke prijs p de maximale opbrengst geeft.

$$R(t, y) = \max_{p \in \pi} \{ \sum_{d=0}^{\infty} \mathbb{P}(D = d)(p \times \min\{d, y\} + R(t + 1, (y - d)^+)) \} \tag{2.2}$$

Formule 2.2 zegt in woorden dat de opbrengst moet worden gemaximaliseerd door te variëren over alle mogelijke prijzen. De opbrengst kan worden beschreven als het aantal producten dat is verkocht maal de prijs plus de opbrengst die nog met de overgebleven producten kan worden gehaald in de resterende periodes. Hierin dient nog wel de kans te worden meegenomen dat er een bepaald aantal producten wordt verkocht.

Deze kans is de grote onbekende in dit model. Daarom moet een keuze worden gemaakt welke kansverdeling de vraag het beste modelleerd. Vaak wordt een Poisson-verdeling met parameter λ aangenomen omdat deze een aankomstproces in de praktijk vaak goed benadert. Andere verdelingen zijn ook te gebruiken in dit model. Het te kiezen model hangt dus af van de verkoopverdeling van het product. Het kiezen van een verdeling heeft de problemen van dit model echter nog niet opgelost. De parameter van de Poisson-verdeling dient te worden geschat voor elke periode om de kans te bepalen. Dit kan met behulp van historische data, maar dit is vaak niet toereikend omdat er geen data is voor elke combinatie van t en p. De parameter kan bij een nieuw product helemaal niet worden bepaald omdat er geen historische data is. Een methode om de parameter te leren zal tot betere resultaten leiden.

2.3.2 Bernoulli-vraag

Het dynamische model met Bernoulli-verdeelde vraag, beschreven door Talluri en Van Ryzin [5], is een vereenvoudigde versie van het model met stochastische vraag. De vraag kan maximaal 1 per periode zijn, en de kans op vraag is nu Bernoulli-verdeeld met parameter λ. De opbrengstfunctie wordt beschreven met formule 2.3.

$$R(t,y) = \max_{p\in\pi}\{\mathbb{P}(D=1)(p+R(t+1,y-1)) + \mathbb{P}(D=0)R(t+1,y)\} \tag{2.3}$$

Deze functie beschreven in woorden zegt dat er p wordt verdiend wanneer er een product wordt verkocht in periode t, en er kan nog meer worden verdiend op de resterende voorraad in $t-1$ periodes. Daarnaast is er nog een kans dat er geen producten worden verkocht in de periode, en dan zal de huidige voorraad nog kunnen worden verkocht in minder periodes.

Dit model werkt vaak alleen met kleine tijdseenheden omdat de vraag naar het product maximaal 1 kan zijn. Dit is wel een beperkende factor want als een prijs per week gewenst is dan kan het zijn dat de tijdseenheid in uren is omdat de vraag naar het product hoog is. Dit geeft dus niet het gewenste resultaat. Daarnaast blijft de onzekerheid over de parameter van de Bernoulli-verdeling bestaan.

2.3.3 Het leren van de reserveringsprijs

Levina en anderen [4] beschrijven, in hun paper over het online leren van de reserveringsprijs verdeling, het volgende model voor dynamisch prijzen van producten. Dit is een uitbreiding van het simpele Bernoulli-vraag dynamische model.

$$R(t,y) = \max_{p\in\pi}\{\Lambda^x(t,p)(p+R(t+1,y-1)) + (1-\Lambda^x(t,p))R(t+1,y)\} \tag{2.4}$$

$$\Lambda^x(t,p) = \lambda(1 - F_t^x(p)) \tag{2.5}$$
$$F_t^x(p) = \text{verdeling van reserveringsprijzen} \tag{2.6}$$

In deze formules zit een onbekende x, en dit is een parameter vector. Om te beginnen nemen we een initiële verdeling voor Λ (prior) afhankelijk van x, en we updaten x zodra er meer informatie beschikbaar komt. Daarvoor moeten we de historie bijhouden op tijdstip t, en we houden de N_t (lijst met verkoopmomenten) en P_t (lijst met prijzen) bij. Op tijdstip t heeft N_t lengte $Y - y$ met Y de beginvoorraad en y de huidige voorraad, en heeft P_t lengte t. De startwaarde voor x is $(0, \emptyset, \emptyset)$.

Er zal op Bayesiaanse manier worden geüpdatet:

$$f_{post} = f_{prior} \times L(t, N_t, P_t|x) \tag{2.7}$$
$$L(t, N_t, P_t|x) = \prod_{\tau \in N_t} \Lambda^x(\tau, p_\tau) \times \prod_{\tau \in \{0,\ldots,t-1\} \setminus N_t} (1 - \Lambda^x(\tau, p_\tau)) \tag{2.8}$$

Het model lijkt een goede verbetering om de onbekende parameter van de Bernoulli-verdeling te leren. Echter is nog niet meteen duidelijk welke verdeling voor Λ moet worden gekozen, en met name wat er van deze verdeling over blijft als er wordt geüpdatet. Het model gaat dus de goede kant uit maar heeft nog zijn beperkingen.

Naast de beperkingen, komt het probleem in de praktijk vaak voor met een stochastische vraag waarbij meerdere producten in een periode kunnen worden gekocht. Om deze reden is een zelfde soort leermethode gewenst in het model met de stochastische vraag. In het volgende hoofdstuk zal het ontwikkelde model worden besproken waar sprake is van stochastische vraag en waar de onbekende parameter ook wordt geleerd volgens een Bayesiaans principe.

Hoofdstuk 3

Stochastisch leermodel

In dit hoofdstuk wordt de ontwikkeling van een stochastisch leermodel voor het dynamisch prijzen van producten beschreven. Deze ontwikkeling is gebaseerd op de modellen die in hoofdstuk 1 zijn beschreven, welke voortkomen uit eerder verschenen literatuur. Het ontwikkelde model probeert net als deze modellen de opbrengst van het product te maximaliseren.

3.1 Leren in de stochastische omgeving

Leren in een stochastisch model is na het lezen van paragraaf 2.3.1 en paragraaf 2.3.3 vrij eenvoudig. Wanneer het beste van beide wordt gecombineerd ontstaat al een model waarmee een stap in de juiste richting wordt gedaan. Formule 2.2 wordt mee gestart en zodanig aangepast dat de vraagparameter wordt geleerd.

Aangenomen wordt dat de vraag naar een product Poisson-verdeeld is met onbekende parameter λ. Dan blijft de formule hetzelfde maar dan met $\mathbb{P}(D = d)$ Poisson-verdeeld. Echter kan er nog niks worden berekend want de onbekende parameter λ is nodig om deze kansen uit te rekenen. Deze λ kan worden geleerd via een Bayesiaanse methode zoals in formule 3.1. In deze formule is f een verdelingsfunctie van een verdeling en *data* de verkoopgegevens van de afgelopen periode.

Bij het leren volgens Bayesiaans principe is het handig gebruik te maken van geconjugeerde verdelingen. Paragraaf 3.2 geeft meer uitleg over geconjugeerde verdelingen en geeft ook het bewijs voor de geconjugeerde verdeling in het geval van een Poisson-verdeelde vraag. Voor het model is alleen nodig dat in het geval van Poisson-verdeelde vraag, λ Gamma-verdeeld is met parameters α en β.

$$f(\lambda | data) \propto \mathbb{P}(data | \lambda) \times f(\lambda) \tag{3.1}$$

De parameters α en β van de Gamma-verdeling zijn onbekend maar in dit probleem van het dynamisch prijzen van producten bekend. Voor α kan het verwachte aantal klanten in de eerste tijdsperiode worden genomen. De startwaarde voor β is geen schatting, deze kan gelijkgesteld worden aan de periode waarvoor de prijs wordt berekend (t).

Door het gebruik van de geconjugeerde verdelingen kan nu een update worden gedaan op de parameter λ, en dus op het aantal producten dat kan worden verkocht, en zal deze zich corrigeren over de tijd. Wanneer de verkoop van een periode bekend is kan voor de volgende periode α worden opgehoogd met het aantal verkopen, en β worden opgehoogd met 1. Hiermee kan een nieuwe prijs worden berekend voor de aankomende periode, en zal daarna deze methode zich herhalen.

Er is echter een probleem met deze methode. De vraag naar een product is op geen enkele manier prijsafhankelijk, dus zal altijd voor de hoogst mogelijke prijs worden gekozen. Om de vraag prijsafhankelijk te maken wordt aangenomen dat de vraag naar een product lineair afhankelijk is van de prijs. Daardoor kan worden aangenomen dat λ van de vorm $a \times p + b$ is, met p de prijs van het product, en a en b twee onbekende parameters. Dit geeft echter een ander probleem: in plaats van één onbekende parameter λ, zijn er nu twee onbekende parameters a en b.

Het onderzoek naar geconjugeerde verdelingen met twee onbekenden die geleerd worden, is helaas nog niet zo ver. Er is enkel voor verdelingen uit de exponentiële familie wat mogelijk. Dit is echter niet in dit onderzoek onderzocht, zie voor meer informatie over deze geconjugeerde verdelingen paragraaf 5.2. Er dient voor nu een andere aanpak gevonden te worden. Wanneer een van beide onbekenden bekend zou zijn, dan zijn de geconjugeerde verdelingen wel weer een goede oplossing. De beste oplossing is daarom om a te schatten aan de hand van historische data van soortgelijke producten. Deze a geeft de invloed van veranderingen in de prijs weer. Er dient dus een schatting gemaakt te worden van de verandering in het aantal verkopen als de prijs met één euro zou veranderen. Voor b kan nu de methode van de geconjugeerde verdelingen worden toegepast, waarbij b Gamma-verdeeld is. β kan in deze Gamma-verdeling nog steeds worden opgehoogd met 1. De parameter α moet echter gecorrigeerd worden voor de lineaire vergelijking die gebruikt wordt. Omdat a negatief is, moet van α, $a \times p$ worden afgetrokken.

Al het bovenstaande kan samengevat worden in formule 3.2. Als deze recursieformule doorlopen wordt, kan voor elke periode t de juiste prijs worden achterhaald.

$$R(t, y, \alpha) = \max_{p \in \pi}\{\sum_{d=0}^{\infty} \mathbb{P}(D = d)(p \times \min\{d, y\} + R(t+1, (y-d)^+, \alpha + d - a \times p))\} \quad (3.2)$$

Waarbij $\mathbb{P}(D = d)$ Poisson-verdeeld is met parameter $\mathbb{E}\lambda = a \times p + \frac{\alpha}{t}$.

3.2 Geconjugeerde verdelingen

In de vorige paragraaf is het stochastische leermodel uitgelegd. In dit model wordt gebruikgemaakt van geconjugeerde verdelingen om de onbekende parameter te leren. Deze paragraaf geeft het wiskundige bewijs waarom de geconjugeerde verdelingen gebruikt mogen worden. Ook bestaan er geconjugeerde verdelingen voor andere dan uit de exponentiële familie. Dus ook als de vraag Normaal-verdeeld blijkt te zijn, blijft het model werken.

Om de leermethode met geconjugeerde verdelingen te kunnen toepassen dient aangetoond te worden dat dit een geldige methode is. Stelling 3.2 geeft dit bewijs voor de Poisson-verdeling omdat dit de meest gebruikte manier is om het aankomstproces te modelleren. Bij een andere vraagverdeling kan in Tabel 3.1, afkomstig uit een proefschrift geschreven door Bhulai [1], worden opgezocht welke a prioriverdeling gebruikt dient te worden.

Stelling 3.2.1. *De geconjugeerde a priori-verdeling van de Poisson-verdeling is de Gamma-verdeling.*

Bewijs. Stel we hebben de beschikking over data, een verkoopcijfer x, maar zoeken daarbij de juiste parameter θ, dan is de verdeling die we zoeken $f(\theta|x)$. Dan geldt volgens de stelling van Bayes (3.1) :

$$f(\theta|x) \propto f(x|\theta) \times f(\theta) \tag{3.3}$$

Uitgangspunt van de stelling is dat de data Poisson-verdeeld is. Dus $f(x|\theta)$ is de kansdichtheidsfunctie van de Poisson-verdeling. De stelling zegt dat de Gamma-verdeling de geconjugeerde a priori-verdeling van de Poisson-verdeling is. Met andere woorden dat $f(\theta)$ Gamma-verdeeld is.

$$\begin{aligned} f(\theta|x) &\propto \frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta} \times \frac{\beta^\alpha}{(\alpha-1)!}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta} && (3.4)\\ &\propto \theta^{\alpha+x-1}e^{-(\beta+1)\theta} && (3.5)\end{aligned}$$

Formule 3.5 zegt dat de a posteriori-verdeling opnieuw een Gamma-verdeling is waarbij de parameters zijn geüpdatet. Het resultaat is een $Gamma(\alpha+x, \beta+1)$-verdeling. □

Tabel 3.1: Geconjugeerde verdelingen

Verdeling	A priori	Statistiek T	A posteriori
$Bernoulli(\theta)$	$Beta(\alpha,\beta)$	$\sum_{i=1}^n x_i$	$Beta(\alpha+T, \beta+n-T)$
$Exponential(\theta)$	$Gamma(\alpha,\beta)$	$\sum_{i=1}^n x_i$	$Gamma(\alpha+n, \beta+T)$
$Neg.Bin(r,\theta)$	$Beta(\alpha,\beta)$	$\sum_{i=1}^n x_i$	$Beta(\alpha+rn, \beta+T)$
$Normaal(\theta,r)$	$Normaal(\mu,\tau)$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$	$Normaal(\frac{\tau\mu+nrT}{\tau+nr}, \tau+nr)$
$Normaal(\mu,\theta)$	$Gamma(\alpha,\beta)$	$\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2$	$Gamma(\alpha+n/2, \beta+T/2)$
$Poisson(\theta)$	$Gamma(\alpha,\beta)$	$\sum_{i=1}^n x_i$	$Gamma(\alpha+T, \beta+n)$
$Uniform(0,\theta)$	$Pareto(R,\alpha)$	$\max_i\{x_i\}$	$Pareto(\max\{T,R\}, \alpha+n)$

3.3 Doorgerekend voorbeeld

In deze paragraaf wordt een voorbeeld doorgerekend om de werking van het model te illustreren. Het voorbeeld is geheel verzonnen waarbij wel is geprobeerd het voorbeeld zo realistisch mogelijk te maken.

De casus

Een winkelketen verkoopt als enige winkel in het land een speciale EK-cd. Voor deze cd is een verkooptijd gereserveerd van vier weken, de vier weken van het EK. Voor een filiaal in Amsterdam zijn 10 cd's besteld en er kan niet worden bijbesteld gedurende de vier weken. Verwacht wordt dat in de eerste week 4 klanten voor de cd zullen komen als de prijs 15 euro bedraagt, elke euro dat de cd goedkoper is levert 0,4 extra verkopen op. De prijs voor de cd moet per week worden bepaald en de mogelijke prijzen voor de cd zijn van te voren vastgesteld op respectievelijk

5, 10, en 15 euro. De filiaalmanager vraagt zich af welke prijs hij in welke week moet hanteren zodanig dat de opbrengst van de verkopen wordt gemaximaliseerd. Hij heeft de keuze tussen een prijs van 5, 10, of 15 euro.

De berekening

Om de kans op een bepaalde vraag uit te rekenen is de rate van de Poisson-verdeling nodig. Deze is gedefineerd als: $\lambda = a \times p + b$ waarbij $a = -0,4$ volgens de casus beschrijving. Bij een prijs van 15 euro geldt $\lambda = 4$, dus b moet gemiddeld 10 zijn. Nu zijn de startwaarden voor de α en β van de Gamma-verdeling bekend, respectievelijk 10 en 1. De startwaarde voor de voorraad is ook bekend, namelijk 10. Omdat het uitrekenen van de juiste prijzen al snel heel complex wordt, is het doorrekenen met de hand uitgesloten. De situatie zal worden doorgerekend met een programma met zoals in Appendix A beschreven pseudo-code.

De oplossing

De oplossing voor het maximaliseren van de opbrengst zoals deze door het model zijn bepaald staat weergegeven in Tabel 3.2.

Tabel 3.2: Oplossing van de casus

t (in weken)	Prijs (euro)
1	15,00
2	15,00
3	10,00
4	5,00
Verwachte opbrengst	143,09

Hoofdstuk 4

Modelvergelijking

In dit hoofdstuk worden de resultaten gepresenteerd van de vergelijking tussen het ontwikkelde model uit hoofdstuk 3, het stochastische model en het deterministische model uit hoofdstuk 2.

4.1 Uitgangspunten

Om het ontwikkelde stochastische leermodel te testen is een experiment bedacht dat het model vergelijkt met bestaande modellen in de literatuur. Het onderzoek is gestart met het idee om de kosten van het leren te schatten, en aan te tonen dat het leren zinvol is ten opzichte van het deterministische model.

Voor de vergelijking worden voor alle modellen dezelfde startparameters T, Y, b, en π gekozen als respectievelijk aantal tijdsperiodes, startvoorraad, verwachte aantal klanten per tijdsperiode, en de verzameling van mogelijke prijzen. Bij deze parameters geeft elk model een bijbehorende prijs $p \in \pi$ voor elke periode $t \in T$, ook wel prijsstrategie genoemd. Elk model geeft tevens een verwachte opbrengst bij een prijsstrategie. Deze verwachtingen kunnen echter niet goed met elkaar worden vergeleken omdat de aanname van een deterministische vraag haaks staat op een aanname van stochastische vraag.

Om de modellen wel met elkaar te kunnen vergelijken, voeren we een simulatie uit die vraag genereert voor elke periode. Hier is gekozen voor een $Poisson(-a \times p + b)$ verdeelde vraag. Voor elke prijs wordt daardoor een andere vraag gegenereerd. Bij een groot aantal simulaties kan zo een gemiddelde opbrengst worden berekend, welke wel met elkaar kunnen worden vergeleken. Om een goed beeld te krijgen van de opbrengsten wordt voor een aantal combinaties van de parameters de simulatie uitgevoerd. In tabel 4.1 worden de verschillende parameter waarden weergegeven.

Tabel 4.1: Parameterwaarden in de simulatie

Parameter	Waarden
Tijdsperioden	[1 ; 8]
Voorraad	[1 ; 9]
α	[4 ; 9]
π	$\{5, 10, 15\}$

4.2 Verwachtingen

Voor de vergelijking wordt uitgevoerd, beschrijven we eerst de verwachte uitkomsten. Dit wordt gedaan om de verwachtingen en de werkelijke uitkomsten van het onderzoek met elkaar te vergelijken.

De vraagverdeling van de simulatie is gelijk gekozen aan de vraagverdeling van het stochastische model. De verwachting is daarom ook dat de verwachte opbrengst voor het stochastische model het grootst zal zijn. Het deterministische model aan de andere kant gaat er vanuit dat de vraagverdeling niet stochastisch is, dus zal het redelijk doen maar niet in de buurt komen van het stochastische model omdat de vraag stochastisch gegenereerd word.

Het ontwikkelde stochastische leermodel gaat wel uit van de stochastische vraag maar moet de parameter leren. De startparameter is gelijk aan de juiste parameter van de vraagverdeling waaruit de vraag wordt getrokken. Het leren verandert echter de parameter zodat wordt uitgegaan van een andere parameter in de latere periodes. Hierdoor zal het leermodel op korte termijn afwijken van de juiste parameter maar op lange termijn de juiste parameter weer aannemen. Wanneer met een andere waarde voor α wordt gestart is de verwachting dat het iets aan inkomsten kost, maar na een aantal tijdsperiodes geen verschil meer geeft. De verwachting is dat naarmate verder wordt afgeweken van de juiste parameter, er meer tijdsperiodes nodig zijn om te corrigeren en dus meer kost. De verwachting van de prestaties van het leermodel liggen daarom ook tussen het stochastische en deterministische model in vanwege de kosten van leren op korte termijn maar de voordelen van leren op lange termijn.

4.3 Resultaten

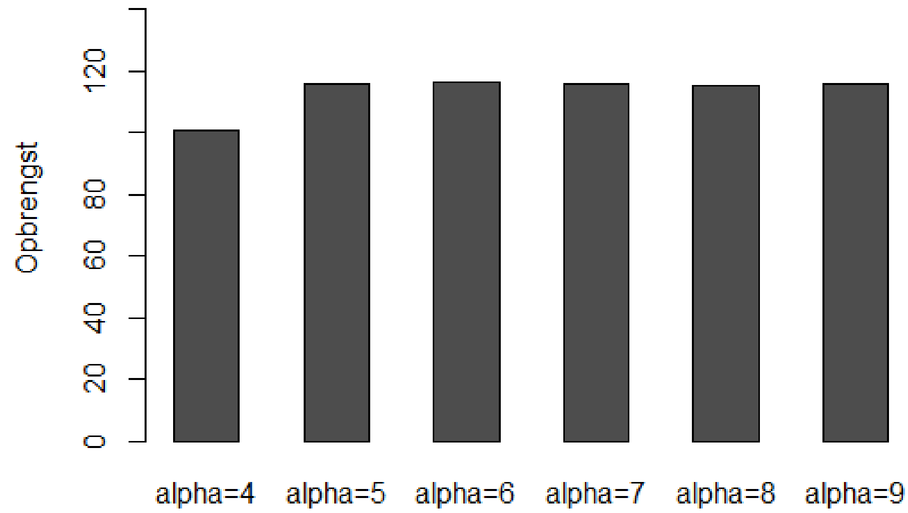
In deze paragraaf wordt eerst de invloed van de startparameter α besproken. Vervolgens wordt het stochastische leermodel vergeleken met de andere modellen. De resultaten worden bediscussieerd in het volgende hoofdstuk.

Bij de modelvergelijking is net als bij het voorbeeld in het vorige hoofdstuk gebruik gemaakt van de prijzenset 5, 10, 15. Voor andere prijzen geldt dat de cijfers anders zijn, maar de resultaten zijn van dezelfde orde van grootte.

4.3.1 De invloed van α

Voor de invloed van α is gekeken naar vele combinaties van de parameters T, Y, a, en b. De resultaten per combinatie kunnen eenvoudig worden weergegeven in een grafiek. In figuur 4.1 worden de opbrengsten van de simulatie weergegeven voor verschillende waarden voor α bij de waarden $T = 5$, $Y = 8$, $a = -0,25$, en $b = 6$.

Wanneer dit onderzoek wordt doorgetrokken naar vele combinaties van de parameters, kan er een uitspraak worden gedaan over de invloed van α. Het belangrijkste hierbij is om te weten te komen hoeveel inkomsten worden ingeleverd wanneer α afwijkend van b wordt gekozen. In tabel 4.2 is af te lezen wat het kost wanneer voor een afwijkende α wordt gekozen. Hoe afwijkender de α wordt gekozen hoe meer de opbrengsten achterblijven. Het betrouwbaarheidsinterval is echter ook groter. Dit



Figuur 4.1: Staafgrafiek van de opbrengst bij de parameters $T = 5$, $Y = 8$, $a = -0,25$, $b = 6$, en α variërend van vier tot en met negen.

komt mede doordat voor kleinere waarden voor T minder gecorrigeerd kan worden voor de grotere afwijkingen.

Tabel 4.2: De invloed van α

$\|b - \alpha\|$	Gemiddelde opbrengst	Betrouwbaarheidsinterval
1	-0,74%	[-1,10% ; -0,39%]
2	-1,99%	[-2,71% ; -1,27%]
3	-3,54%	[-4,73% ; -2,35%]
4	-6,58%	[-8,80% ; -4,36%]

Andere punten die opvielen tijdens het onderzoek naar de invloed van α, is dat een α groter dan b de voorkeur heeft boven een kleinere α. Een overschatting van de vraag is in dit geval dus beter dan een onderschatting van de vraag. Het laatste zichtbare resultaat is tevens een waarschuwing voor de invloed van α. Wanneer de combinatie van a en α zorgt voor een gemiddelde vraag per periode dicht bij nul, geeft dit afwijkende resultaten dan andere waarden van α.

De invloed van de parameter T speelt ook mee. In dit onderzoek is alleen gekeken naar waarden tussen 1 en 10 maar daarin is te merken dat wanneer T groter wordt, de invloed van α iets afneemt.

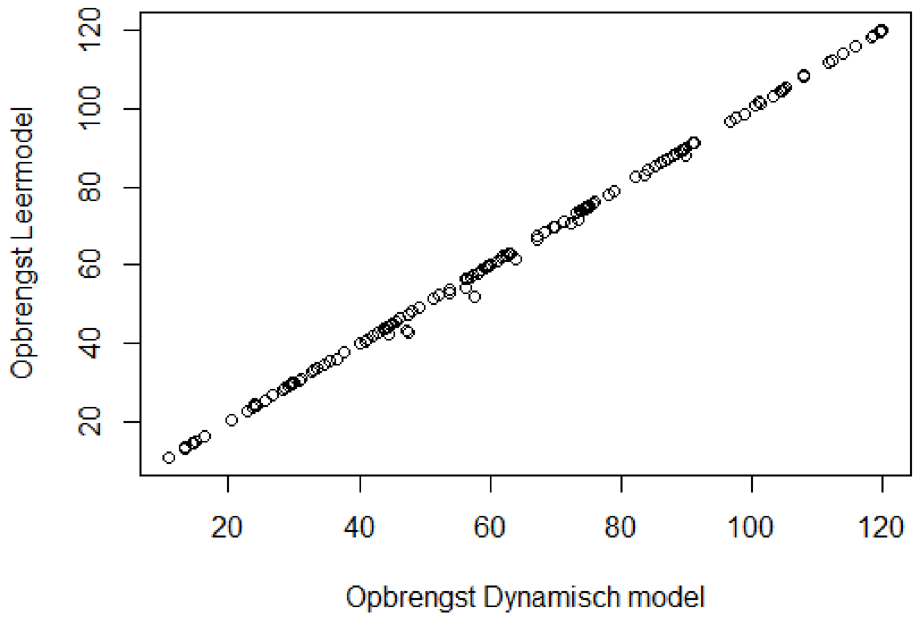
4.3.2 Modelvergelijkingen

Nu we de invloed van de parameter α kennen, kan een vergelijking worden gemaakt tussen de bestaande modellen en het ontwikkelde model. Om een vergelijking te maken, wordt gekozen voor een α die gelijk is aan b. Zo zijn voor elk model alle parameters gelijk.

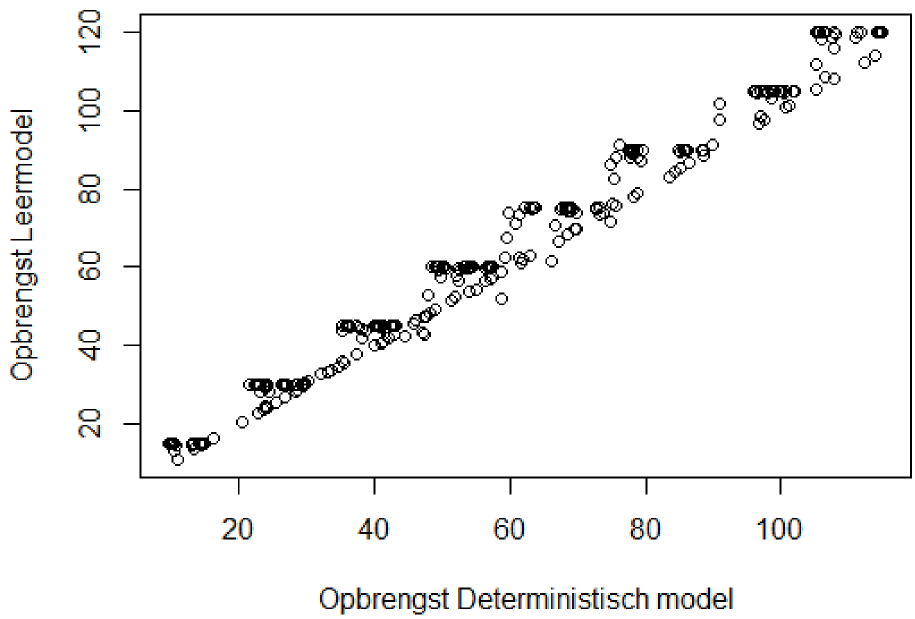
We beginnen het leermodel te vergelijken met het dynamische model. Het experiment zoals hierboven beschreven is uitgevoerd om gemiddelde opbrengsten te genereren voor verschillende parameters van T, Y, en b. Om deze uitkomsten met elkaar te vergelijken geeft figuur 4.2 een scatterplot van de opbrengsten uit beide modellen. In het figuur is af te lezen dat over het algemeen het leermodel het net zo goed doet als het dynamische model. Dit is te zien aan de lijn $y = x$, waar de meeste punten op liggen. De afwijkende punten komen voor wanneer er een kwetsbare combinatie van de parameters wordt gebruikt. Een voorbeeld hiervan is de in de vorige subparagraaf beschreven waarschuwing van de combinatie van a en α. Het leren kost gemiddeld 0,15% van de opbrengst met een 95% betrouwbaarheidsinterval van [0,03% ; 0,26%].

Vervolgens vergelijken we het ontwikkelde leermodel met het eenvoudigste model, het deterministische model. Het deterministische model is ook onderworpen aan het hierboven beschreven experiment. De simulaties hebben voor verschillende parametercombinaties resultaat opgeleverd in de vorm van gemiddelde opbrengst over de simulaties. Deze zijn vergeleken met de gemiddelde opbrengsten van de simulaties van het leermodel. De resultaten van de vergelijking zijn weergegeven in figuur 4.3. In het figuur is te zien dat het leermodel in de meeste gevallen minstens zo goed is als het deterministische model. Er zijn een paar gevallen waarin het leermodel een iets lagere opbrengst heeft, er is geen duidelijke verklaring voor. In bijna 80% van de gevallen geeft het leermodel een hogere opbrengst dan het deterministische model. De opbrengst is gemiddeld 8.52% hoger bij gebruik van het leermodel ten opzichte van het deterministische model met een 95% betrouwbaarheidsinterval van $[7.45\%; 9.59\%]$.

Voor beide vergelijkingen geldt echter dat de invloed van de parameter T meespeelt. Voor het verschil tussen het leermodel en het dynamische model geldt dat het verschil steeds kleiner wordt naarmate T toeneemt. Voor het verschil tussen het leermodel en het deterministische model geldt echter het omgekeerde. Het verschil tussen de twee modellen wordt groter naarmate T groter wordt.



Figuur 4.2: Scatterplot van de opbrengsten van het leermodel tegenover het dynamische model.



Figuur 4.3: Scatterplot van de opbrengsten van het leermodel tegenover het deterministische model.

Hoofdstuk 5

Conclusies en aanbevelingen

In dit hoofdstuk proberen we conclusies te trekken uit de modelvergelijkingen. Ook worden de resultaten vergeleken met de verwachtingen die we vooraf hadden. De sterke en zwakke punten van het model worden op een rij gezet. Zo kan een keuze gemaakt worden wanneer het model gebruikt dient te worden. Tot slot wordt richting gegeven aan vervolgonderzoek.

5.1 Modelvergelijking

De onderzoeksresultaten die in hoofdstuk 4 zijn gepresenteerd geven genoeg reden tot discussie. Allereerst de invloed van α: de kosten van het leren van de juiste parameter b zijn groter naarmate het verschil tussen b en α toeneemt. Dit is een logisch resultaat omdat het leren van de parameter dan een aantal tijdsperiodes extra in beslag neemt en in elk van deze periodes dus opbrengsten worden misgelopen. De invloed van de parameter neemt echter af als T groter wordt. Wanneer het leermodel dus wordt toegepast op een product dat een half jaar verkocht wordt met een wekelijkse update van het model, kan een fout in de schatting van α goed worden gecorrigeerd.

De vergelijking van het leermodel met het dynamische model en het deterministische model hebben het leermodel een plaats gegeven in het spectrum van prijzingsmodellen. Het leermodel komt in de buurt van het dynamische model, mits de parameter α redelijk wordt gekozen. Het leermodel geeft een stijging van de opbrengst ten opzichte van het deterministische model van gemiddeld 8%. Het leermodel zit in het geval van een constante en bekende Poisson-verdeelde vraag tussen het dynamische en het deterministische model in. Dit resultaat is volledig naar onze verwachtingen. Dat het leermodel het echter zo goed doet ten opzichte van het dynamische model is een prachtig resultaat. Dit betekent dat niet langer veel moeite gedaan hoeft te worden om de juiste parameter van het dynamische model te schatten. Het leermodel kan worden ingezet waar de parameter wordt geleerd en de parameter α hoeft minder nauwkeurig geschat te worden.

Het leermodel is erg sterk wanneer een redelijke schatting van de parameters wordt gemaakt. Zo kan bij een nog onbekende vraagparameter een juiste prijs worden bepaald. Het model is minder sterk wanneer de vraag per periode gemiddeld tussen de nul en één uitkomt. Het model heeft dan meer moeite met het leren van de parameter. Het model is dan minder geschikt om te gebruiken.

5.2 Vervolgonderzoek

Eerder in paragraaf 3.1 werd in het model de parameter λ geleerd door de parameter a vast te kiezen in de vergelijking $\lambda = a \times p + b$, en b te leren met een geconjugeerde verdeling. Het model zou betere resultaten geven wanneer a niet vast wordt gekozen maar ook zal worden geleerd. Om de simpele manier van leren door middel van geconjugeerde verdelingen ook toe te passen wanneer a geleerd wordt, dient gebruik te worden gemaakt van geconjugeerde verdelingen die meerdere parameters kunnen leren. Hier is aanvullend onderzoek voor nodig om uit te wijzen of deze verdelingen dezelfde mooie eigenschappen hebben als de geconjugeerde verdelingen waarbij maar één parameter wordt geleerd. Ook is niet duidelijk of dit toe te passen is in de context van dynamisch prijzen .

Om het onderzoek naar deze geconjugeerde verdelingen te stimuleren dient niet te worden gezocht naar een oplossing voor een vraag die $Poisson(a \times p + b)$ verdeeld is, maar $Poisson(\mathrm{e}^{a \times p + b})$ (zie [3]). Daarvoor is een geconjugeerde verdeling te vinden die beide parameters leert, maar het is onbekend of dit ook in dynamisch prijzen is toe te passen.

Een andere richting voor vervolgonderzoek is een praktijkimplementatie. Dit moet werkelijk uitwijzen of het model in de praktijk toegevoegde waarde heeft. Het gaat hier in eerste instantie om producten met een beperkt verkoopseizoen zonder de mogelijkheid tot nabestellen. Echter kan ook onderzocht worden of met een kleine aanpassing het nabestellen kan worden geïntegreerd.

Bibliografie

[1] Bhulai, Sandjai: *Markov decision processes: the control of high-dimensional systems*. Universal Press, The Netherlands, 2002.

[2] Bitran, Gabriel R. en Susana V. Mondschein: *Periodic Pricing of Seasonal Products in Retailing*. Management Science, Vol. 43(1), January 1997.

[3] Chen, Ming Hui en Joseph G. Ibrahim: *Conjugate priors for generalized linear models*. Statistica Sinica, (13):461–476, 2003.

[4] Levina, Tatsiana, Yuri Levin, Jeff McGill, en Mikhail Nediak: *Dynamic Pricing With Online Learning Of General Reservation Price Distribution*. Elsevier, 2006.

[5] Talluri, Kalyan en Garrett van Ryzin: *The theory and practice of revenue management*. Kluwer academic publishers, 2004.

Bijlage A

Pseudo-code

In deze bijlage wordt een aanzet gegeven voor het schrijven van een programma dat het in de inleiding geschetste probleem kan oplossen. Het werkt volgens het in hoofdstuk 3 beschreven stochastische leermodel.

Start met het initialiseren van de variabelen T, Y, a en α voor respectievelijk het aantal tijdseenheden, de begin voorraad, het verlies van klanten bij een euro hogere prijs, en het aantal klanten bij een gratis product. Daarnaast moet een vector P worden geïnitialiseerd met de mogelijke prijzen voor het product.

Na de initialisatiefase kan met de functie $rev(0, Y, \alpha)$ een tabel worden gegenereerd. Daarnaast berekent deze functie de verwachtte opbrengst van de beste prijsstrategie.

```
rev(t,y,alpha) {
        if(t==T+1 || y==0){
                return 0;
        }
        max = 0;
        foreach(p in P){
                theta = max(a*p + alpha/t,0);
                som = 0;
                for(d=0 to y){
                        som += poissonpdf(theta,d) *
                               (p * d + rev(t+1,y-d,alpha+d-a*p));
                }
                som += (1-poissoncdf(theta,y-1)) * p * y;
                array[t][i][alpha][y] = som;
                if(som > max){
                        max = som;
                }
        }
        return max;
}
```

De Poisson-functies voor het stochastische gedeelte van de functie, kunnen eenvoudig worden geprogrammeerd met behulp van de kansmassafunctie en verdelingsfunctie van de Poisson-verdeling.

Wanneer de tabel gecreeërd is, kunnen met behulp van deze tabel de juiste prijzen worden berekend. De functie $prijzen(Y, \alpha)$ geeft de optimale prijsstrategie in een vector.

```
prijzen(y,alpha){
        foreach(t in T){
                prijs = 0;
                max = 0;
                foreach(p in P){
                        som = 0;
                        for(alpha to alpha+y){
                                theta = max(a*p + alpha/t,0);
                                for(d=0 to y){
                                        som += array[t][p][alpha][y-d];
                                }
                        }
                        if(som>max){
                                max = som;
                                prijs=p;
                        }
                }
                prijzen[t] = prijs;
        }
}
```