

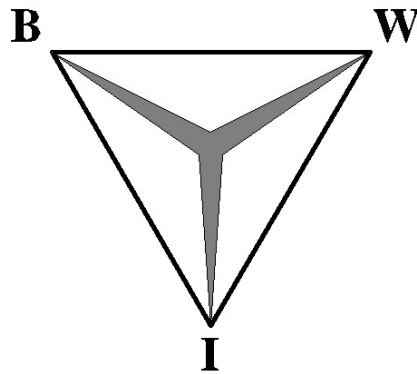
Netwerk revenue management

Werkstuk

Aafje van den Berg

september 2005

Netwerk revenue management



Aafje van den Berg

Werkstuk

Vrije Universiteit

Faculteit der Exacte Wetenschappen

Studierichting Bedrijfswiskunde en Informatica

De Boelelaan 1081a

1081 HV Amsterdam

september 2005

Voorwoord

Dit werkstuk is geschreven als onderdeel van de studie Bedrijfswiskunde en Informatica aan de Vrije Universiteit te Amsterdam. Dit studieonderdeel heeft als doel de student op een heldere wijze een probleem te laten beschrijven, waarbij het resultaat bestemd is voor een deskundig manager.

Ik heb gekozen voor het onderwerp netwerk revenue management naar aanleiding van het artikel van de Boer e.a. (2001) "Mathematical programming for network revenue management revisited".

Bij de totstandkoming van dit werkstuk ben ik geholpen door mijn begeleider drs. M. J. Soomer en ik wil hem dan ook bedanken voor zijn ondersteuning en adviezen.

Aafje van den Berg

Amsterdam, september 2005

Samenvatting

Luchtvaart revenue management gaat over het beheersen van boekingen door het verkopen van de juiste stoelen aan de juiste klanten op het goede tijdstip met het doel de opbrengst te maximaliseren. Er wordt onderscheid gemaakt tussen technieken voor enkele vluchten en voor een netwerk van vluchten. Dit werkstuk gaat over netwerk revenue management toegepast in de luchtvaartindustrie. Er wordt duidelijk gemaakt dat het beter is om de boekingen over het gehele netwerk te optimaliseren in plaats van per enkele vlucht en wordt er een overzicht gegeven van een aantal verschillende netwerkmethoden.

De twee meest populaire technieken om boekingen te beheersen, “boekingslimieten” en “bid prices”, worden behandeld. Een bid price is de minimale te accepteren prijs voor een reis en een boekingslimiet stelt een limiet aan het aantal boekingen dat per prijsklasse geaccepteerd wordt.

Mathematische programmeringsmethoden bieden statische oplossingen voor het netwerk revenue management probleem. Deze zijn te verdelen in deterministische en stochastische methoden. De stochastische methode wordt gezien als de beste statische oplossingmethode, zolang er geen nesting wordt toegepast. Door middel van mathematische programmeringmethoden kunnen geneste boekingslimieten en bid prices voor de verschillende reizen en tariefklassen in het netwerk worden afgeleid.

Statische methoden geven boekingslimieten en bid prices op een of meer momenten van de boekingsperiode. Dit is niet optimaal. Een volledig dynamisch methode zou beter zijn, omdat die kan worden aangewend bij elke beslissingsgelegenheid en dan de optimale beslissing op dat moment bepaalt. Dat is echter niet haalbaar vanwege de benodigde rekentijd. Wel zijn er een aantal dynamische schattingsmethoden bedacht, waarvan er één in dit werkstuk wordt besproken.

In Excel heb ik als voorbeeld met behulp van Solver één van de netwerkmethoden toegepast om boekingslimieten te krijgen voor een klein netwerk van vluchten met twee tariefklassen. Hierna heb ik de schaduwrijzen berekend om de nesting rangorde te bepalen. Aan de hand van de rangorde worden vervolgens de geneste boekingslimieten bepaald. Om de bid prices te bepalen zijn de schaduwrijzen van de capaciteitsrestricties nodig, die met behulp van het mathematisch programmeringsmodel worden verkregen.

Inhoudsopgave

Inleiding	1
1. Belangrijke punten van revenue management	5
2. Single leg revenue management	7
3. Netwerk revenue management	9
4. Boekingslimieten voor een netwerk	13
4.1 Deterministische schattingsmethode	13
4.2 Stochastische schattingsmethode	14
4.3 Nesting	14
4.3.1 Construeren van boekingslimieten met nesting	15
4.4 Op simulatie gebaseerde boekingslimieten	17
5. Bid prices	19
6. Een voorbeeld	21
6.1 Boekingslimieten	22
6.1.1 Nesting	23
6.2 Bid Prices	25
7. Conclusie	27
Literatuur	29

Inleiding

Revenue management is ontstaan in de luchtvaartindustrie. Het kan worden gedefinieerd als de kunst om een product te verkopen aan de juiste klant op het juiste tijdstip voor de juiste prijs, waarbij het een vastgestelde hoeveelheid betreft die tijdens een bepaalde periode moet worden verkocht.

Deregulering van de Amerikaanse luchtvaart in 1979 leidde tot hevige concurrentie. Luchtvaartmaatschappijen werden gedwongen om hun prijzen aan te passen aan de concurrenten, maar wilden tegelijkertijd niet de klanten kwijtraken die nog wel bereid waren een hogere prijs te betalen. Het succes van een luchtvaartmaatschappij bleek in grote mate afhankelijk van het toepassen van revenue management. De maatschappijen besteden er tegenwoordig veel aandacht aan. Dat het belangrijk is blijkt onder andere uit het bericht van American Airlines, dat in 1992 een opbrengststijging van vijf procent meldde, \$ 1,4 miljard over een periode van drie jaar, verkregen door verbeterde revenue management methoden. (Smith, Leimkuhler en Darrow (1992))

De meeste andere toepassingen van revenue management zijn direct afgeleid van het luchtvaartprobleem en gebruiken over het algemeen dezelfde mathematische methoden die oorspronkelijk geconstrueerd waren voor de luchtvaartindustrie. Voorbeelden hiervan zijn te vinden bij de toonaangevende hotelketens zoals de Golden Tulip, het bedrijf Hertz dat auto's verhuurt (Carroll en Grimes (1995)) en bij de Amerikaanse autoproducent Ford Motor Company. Dit bedrijf had tussen 1995 en 1999 een opbrengsttoename van \$ 4,5 miljard, waarvan \$ 3 miljard te danken was aan nieuwe revenue management toepassingen (Leibs (2000)).

Wanneer klanten bereid zijn verschillende prijzen te betalen is het mogelijk om klantsegmenten samen te stellen door gebruik te maken van productdifferentiatie. Dit betekent dat hetzelfde product wordt verkocht voor verschillende prijzen, bijvoorbeeld door een hogere prijs te rekenen als iemand op een later tijdstip koopt of meer service wenst. Om dit mogelijk te maken moet er besloten worden welke tarieven er zijn en hoeveel producten er per klantsegment gereserveerd moeten worden. Dit soort beslissingen zijn het onderwerp van revenue management.

Een luchtvaartmaatschappij biedt tickets aan voor verschillende reisroutes en in verschillende tariefklassen. Aangezien de tickets voor een vlucht moeten worden verkocht vòòr het vliegtuig opstijgt, is het product beperkt houdbaar. De stoelen op een vlucht zijn producten die verkocht kunnen worden aan verschillende klantsegmenten voor verschillende prijzen. Er is een verschil in prijs tussen business en economy class, maar ook worden er verschillende tarieven binnen één klasse berekend. Deze verschillen worden gerechtvaardigd door andere voorwaarden voor bijvoorbeeld annuleren of overnachtingen. Bijvoorbeeld:

- € 1000 Y klasse product: kan op elk moment worden aangeschaft, geen beperkingen, gehele terugbetaling bij annuleren
- € 200 Q klasse product: vereist aankoop 3 weken van te voren, verplichte zaterdag overnachting, kosten voor het veranderen van het ticket.

Met deze en andere verschillende tariefklassen die concurreren om dezelfde stoelcapaciteit in het vliegtuig, moet de beschikbaarheid van klassen worden beheerst om te voorkomen dat het vliegtuig zich vult met passagiers met een lage ticketprijs. Als een luchtvaartmaatschappij volgens het *first-come first-serve* principe tickets zou verkopen, zou het vliegtuig snel gevuld zijn met vakantie reizigers, die hun reis vroeg willen boeken. Voor mensen die later willen boeken, zoals bijvoorbeeld zakenmensen, en bereid zijn een hogere prijs te betalen, zullen er geen stoelen beschikbaar zijn, waardoor de luchtvaartmaatschappij opbrengst misloopt. Met (luchtvaart) revenue management probeert men, aan de hand van vraagvoorspellingen, te bepalen hoeveel stoelen er aan elke klasse moeten worden toegewezen. Het doel is de juiste mix van passagiers op een vlucht te vinden zodat de opbrengst wordt gemaximaliseerd. De gewenste toewijzing van stoelen bepaalt of een boekingsaanvraag die binnenkomt geaccepteerd of geweigerd moet worden.

Huidige revenue management methodes zijn te verdelen in *single leg* en *netwerk* revenue management. Een *leg* is één vlucht van stijgen tot landen. Single leg revenue management heeft als doel de passagiersmix op een enkelvoudige leg te optimaliseren, zoals hierboven beschreven.

Het is mogelijk dat een passagier gebruik wil maken van meerdere aansluitende legs om zijn eindbestemming te bereiken. Deze passagier concurreert om dezelfde stoel in het vliegtuig als de single leg passagier. Voor elke leg die de passagier wil gebruiken moet een afweging worden gemaakt of deze passagier wordt geaccepteerd of de single leg passagier. Daarom moet een luchtvaartmaatschappij in staat zijn de aanvragen te vergelijken om vast te stellen welke aanvraag het meest bijdraagt aan de totale opbrengst van de luchtvaartmaatschappij. Dit gebeurt met behulp van netwerk revenue management. Hierbij worden boekingsaanvragen voor meerdere legs op hetzelfde moment beschouwd.

Dit werkstuk zal gaan over netwerk revenue management. Belangrijke punten van revenue management zijn te vinden in hoofdstuk 1. De single leg literatuur die vooraf ging aan netwerk revenue management wordt behandeld in hoofdstuk 2. Een inleiding in netwerk revenue management staat in hoofdstuk 3, gevolgd door methoden die er zijn om boekingslimieten vast te stellen voor een netwerk van vluchten in hoofdstuk 4. Methoden om bid prices voor een netwerk te bepalen staan in hoofdstuk 5. Eén van de netwerkmethoden om boekingslimieten te bepalen heb ik toegepast in een virtueel netwerk van vluchten en opgelost met Solver in Excel. Ook heb ik voor dit netwerk de geneste boekingslimieten en de bid prices bepaald. Dit alles staat in hoofdstuk 6. Een conclusie is te vinden in hoofdstuk 7.

1. Belangrijke punten van revenue management

Seat inventory control is de kern van revenue management. Het is het bepalen van het aantal stoelen dat, tot het vertrek van het vliegtuig, aan de boekingsverzoeken voor verschillende tariefklassen wordt toegewezen, met als doel het maximaliseren van de winst door de goede mix van passagiers op de vlucht. Het optimaal toewijzen van de stoelen wordt gedaan door middel van een boekingsstrategie, welke bepaalt of een boekingaanvraag wordt geaccepteerd of niet. Het kan zijn dat het meer opbrengt om een aanvraag te weigeren om zodoende een aanvraag van een klant, die later boekt en bereid is een hogere prijs te betalen, te kunnen accepteren.

Er zijn een aantal mathematische modellen ontwikkeld om boekingsstrategieën te bepalen. De eerste boekingsystemen zijn gebaseerd op *boekingslimieten*, waarbij boekingen beheersen worden door een grens te stellen aan het aantal passagiers dat geaccepteerd wordt per tariefklasse. Op deze manier kan de totale capaciteit opgedeeld worden in de verschillende tariefklassen, om de gewenste passagiersmix te krijgen. Boekingsverzoeken voor een bepaalde tariefklasse worden geaccepteerd zolang de limiet nog niet is bereikt. Men kan aan de opdeling vasthouden zolang er geen veranderingen in de vraagvoorspelling worden verwacht. In de praktijk worden de boekingslimieten voortdurend gewijzigd om deze aan de fluctuerende vraag aan te passen.

Om boekingslimieten te bepalen zijn de *prijzen* van de verschillende tariefklassen van groot belang, aangezien deze veel invloed hebben bij het optimaliseren van de opbrengst. Echter, prijzen en boekingslimieten worden meestal afzonderlijk beschouwd. Prijzen worden vaak bepaald door de strategische of marketing afdeling van een luchtvaartmaatschappij, die in het bijzonder rekening houdt met de concurrentie.

Een boekingsbeleid kan worden verwezenlijkt aan de hand van de genoemde boekingslimieten, maar ook met *bid prices*. Een bid price strategie is een methode die in direct verband staat met de schaduwprijs van een stoel. De bid price voor een vlucht is de drempelwaarde voor een stoel op dat specifieke moment. De waarde hiervan hangt af van de nog beschikbare capaciteit, de tijd tot vertrek en de verwachte vraag. Een boekingsverzoek wordt alleen geaccepteerd als de tariefprijs ervan groter is dan de som van de bid prices van de legs die gebruikt worden voor die reis. Aangezien er maar één drempelwaarde hoeft worden opgeslagen voor elke vlucht, in plaats van boekingslimieten voor alle mogelijke boekingsklasse, zijn bid prices veel eenvoudiger te implementeren dan boekingslimieten.

Een nadeel van bid prices is dat zij continue moeten worden bijgewerkt om tot optimale opbrengsten te leiden. Nieuwe gegevens over de resterende capaciteit en de vraag naar stoelen moeten worden verwerkt. Als één bid price wordt toegepast over een langere periode zou dat betekenen dat niet één boekingsaanvraag die onder de bid price zit geaccepteerd wordt. Evenzeer zou er geen beperking worden opgelegd aan het aantal boekingen boven de bid price, zelfs als deze maar in kleine mate boven de bid price zitten. Regelmatige aanpassing van het beleid leidt tot openen of sluiten van tariefklassen voor boekingen door het verlagen of verhogen van de bid price.

De methoden die gebruikt worden om boekingslimieten en bid prices te bepalen maken allen gebruik van *vraagvoorspellingen*, die aan de hand van historische gegevens worden gedaan. Als het aantal hoge tarief passagiers wordt overschat, zal dit leiden tot lege stoelen, terwijl teveel lage tarief passagiers worden geaccepteerd als het aantal hoge tarief passagiers wordt onderschat. Een verkeerde vraagvoorspelling zal dus leiden tot een slechte boekingstrategie.

Williamson (1992) onderzocht de beide boekingsmethoden maar vond geen significant verschil in opbrengst tussen boekingsbeleid aan de hand van boekingslimieten of aan de hand van bid prices.

2. Single leg revenue management

Om het revenue management probleem te kunnen beschouwen, dient er een aantal aannames gemaakt te worden over het gedrag van de vraag. Bij de eerste seat inventory control systemen waren dit de volgende:

- geen annuleringen, no-shows of overboekingen
- geen groepsboekingen
- statistische onafhankelijkheid van de vraag naar verschillende boekingsklassen: de vraag naar de ene boekingsklasse wordt niet beïnvloed door de vraag naar een andere boekingsklasse.

Verder wordt er uitgegaan van verschillende boekingsklassen: klanten betalen verschillende prijzen voor wezenlijk dezelfde stoel op een vlucht.

De eerste methode werd bedacht door *Littlewood* (1972). In zijn werk bedacht hij optimale boekingslimieten voor een enkelvoudig leg probleem met twee tariefklassen.

f_1 en f_2 : respectievelijk de prijs in de hoge en de lage tariefklas, ($f_1 > f_2$)

p_1 : het aantal stoelen dat wordt toegewezen aan f_1

D_1 : de stochastische vraag naar f_1

Er wordt aangenomen dat de vraag naar de lage tariefklasse groter is dan de totale capaciteit en boekingsaanvragen eerst aankomen voor de lage tariefklasse en daarna pas voor de hoge tariefklasse. Zijn idee was om de lage tariefaanvragen te accepteren totdat de opbrengst van het accepteren van nog een lage tariefklasse wordt overtroffen door de verwachte opbrengst van de hoge tariefklasse. De aanvragen voor de lage tariefklasse moeten worden geaccepteerd zolang

$$f_2 \geq f_1 P(D_1 > p_1)$$

waarbij $P(D_1 > p_1)$ dus de kans is dat alle beschermde stoelen aan de hoge tariefklasse passagiers worden verkocht. De kleinste waarde van p_1 die aan de bovenstaande conditie voldoet is het aantal stoelen dat voor de hoge tariefklasse beschermd moet worden en wordt het beschermingsniveau van de hoge tariefklasse genoemd. Er is aangetoond dat de intuïtieve regel van Littlewood om te bepalen wanneer de lage tariefklasse moet worden gesloten, inderdaad optimaal is.

Belobaba (1987, 1989) veralgemeniseert deze benadering naar een heuristische strategie voor het geval dat er meerdere tariefklassen zijn. De ontwikkelde techniek wordt de “Expected Marginal Seat Revenue” (EMSR) genoemd. De boekingslimieten die met deze methode geproduceerd worden zijn niet optimaal, behalve in het geval van twee tarieven. Een latere verbetering van EMSR, EMSRb, produceert een betere benadering voor optimale boekingslimieten en wordt veel toegepast.

Er is een toenemende voorkeur voor dynamische boekingsmethoden. Statische methoden verschaffen een vastgesteld boekingsbeleid gebaseerd op de totale vraagverwachting voor elke tariefklasse zoals deze is voorspeld op het moment van optimalisatie. Het boekingsbeleid staat vast gedurende de gehele boekingsperiode en past zich niet aan als er onverwachte ontwikkelingen in de vraag ontstaan. Omdat dit duidelijk suboptimaal is probeert men betere uitkomsten te verkrijgen door de statische methode meerdere keren toe te passen tijdens de boekingsperiode, gebaseerd op de meest recente informatie over de vraag en capaciteit. Dynamische methoden worden aangewend bij elke beslissingsgelegenheid en bepalen de optimale beslissing op dat moment. Verder kunnen dynamische methoden gemakkelijk worden uitgebreid om belangrijke praktische factoren zoals overboeken, afzeggingen en no-shows te kunnen opnemen.

Lee en Hersh (1993) stellen een dynamisch programmeringsmodel voor dat de optimale dynamische boekingsbeleid bepaald en verzwakken de aanname dat boekingsverzoeken voor lage tariefklasse eerder aankomen dan boekingsverzoeken voor hoge tariefklassen.

3. Netwerk revenue management

Tussenstops zijn bij vliegereizen gebruikelijk. Sinds de jaren tachtig is er sprake van de opkomst van hub-and-spoke netwerken. Hub-and-spoke systemen zijn routenetwerken van een luchtvaartmaatschappij. Het netwerk is als een ster geconcentreerd rond één of enkele centrale luchthavens, de hubs. De luchthavens die geen hub-functie vervullen worden aangeduid als spokes. Passagiers die tussen de spokes reizen worden aangevoerd naar de hub. Vervolgens kunnen zij op de hub binnen een kort tijdsbestek overstappen op hun aansluitende vlucht. In het hub-and-spoke netwerk worden directe vluchten tussen de spokes dus vervangen door indirecte vluchten met een overstap op de hub.

Luchtvaartmaatschappijen maken gebruik van hub-and-spoke netwerken omdat deze netwerken bepaalde kosten- en opbrengstenvoordelen kunnen opleveren ten opzichte van netwerken waarin alleen directe verbindingen bestaan. Deze voordelen omvatten ondermeer hogere bezettingsgraden van vliegtuigen, het kunnen inzetten van grotere vliegtuigen waardoor schaalvoordelen te behalen zijn en het kunnen aanbieden van een zeer groot netwerk tegen acceptabele kosten.

Ter illustratie: de Amerikaanse luchtvaartmaatschappij Delta Airlines heeft haar belangrijkste hub op Atlanta, 's werelds grootste luchthaven. 'Of je nu naar de hemel of de hel gaat, je moet overstappen in Atlanta', was een veelgehoorde grap in het zuidoosten van de Verenigde Staten. Delta verzamelt haar passagiers op Atlanta en distribueert die vervolgens naar hun eindbestemmingen. Dit is veel goedkoper dan dat alle mogelijke combinaties van start- en eindbestemmingen met directe vluchten door Delta bediend zouden worden.

Vanwege dit hub-and-spoke netwerk is het beter om boekingen over het hele netwerk te optimaliseren in plaats van per vluchtleg. Passagiers zullen met verschillende beginpunten en eindbestemmingen gebruik maken van dezelfde legs en strijden om de capaciteit van deze legs. De afweging moet worden gemaakt of bijvoorbeeld een aanvraag voor een hoge tariefklasse moet worden geaccepteerd die maar één vluchtleg bevat, of een aanvraag van een lagere tariefklasse die meerdere vluchtlegs bevat. Stel bijvoorbeeld dat een aanvraag binnenkomt voor een hoge tariefklasse vlucht van Singapore naar Amsterdam. Als alternatief zou deze stoel verkocht kunnen worden aan een passagier van een lagere tariefklasse, die reist van Singapore naar New York, via Amsterdam. Als de directe vlucht van Amsterdam naar New York nog genoeg capaciteit heeft, zou het toewijzen van de laatste aanvraag

winstgevender kunnen zijn als dat een hogere totale ticketprijs heeft. Maar als er lokaal wordt geoptimaliseerd zou de eerste aanvraag worden toegewezen, omdat deze de hoogste tariefklasse heeft. Luchtvaartmaatschappijen bieden vaak honderden combinaties aan van herkomst, bestemming en tariefklasse (Origin, Destination, Fare class, afgekort ODF). Vandaar dat het bepalen van een overall strategie om de boekingen te beheersen niet eenvoudig is. Om te beslissen welk verzoek wordt toegewezen is het beter om boekingen te optimaliseren over het hele netwerk in plaats van per vluchtleg.

Er zijn een aantal methoden voorgesteld om het boekingsbeleid voor een netwerk te bepalen. Een aanpak is om het netwerkprobleem op te delen in single leg problemen door het toewijzen van de opbrengst van een multileg vlucht aan de gebruikte legs, wat prorating wordt genoemd. Voor deze subproblemen zijn er bevredigende statische en dynamische oplossingsmethoden, zoals behandeld in het voorgaande hoofdstuk. Williamson (1992) heeft gekeken naar prorating, gebaseerd op het totaal aantal afgelegde mijlen van de afzonderlijke legs, maar concludeert dat andere methoden, die uitgaan van mathematische programmering, leiden tot significante toename in verwachte opbrengst ten opzichte van prorating technieken. Deze mathematische programmeringsmethoden beschouwen het netwerk van vluchten in het geheel en kunnen goed herkennen welke reisroutes de grootste bijdrage leveren aan de opbrengst van de luchtvaartmaatschappij.

In dit werkstuk worden twee mathematische programmeringsmethoden besproken. Hierbij geldt de volgende aanduiding:

X_{ODF} : het aantal stoelen dat gereserveerd wordt voor een ODF

D_{ODF} : de vraag naar een ODF

f_{ODF} : de tariefklasse van een ODF

C_l : de capaciteit van een leg

S_l : de groep van alle ODF combinaties die deze leg bevatten.

Het netwerkprobleem kan als volgt worden geformuleerd:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximaliseer} & E\left(\sum_{ODF} f_{ODF} \min\{X_{ODF}, D_{ODF}\}\right) & (1) \\
 \text{Onder} & \sum_{ODF \in S_l} X_{ODF} \leq C_l & \text{voor elke } l \\
 & X_{ODF} \geq 0 \text{ geheel} & \text{voor elke ODF.}
 \end{array}$$

Het doel is de stoelen zó toe te wijzen dat de totale verwachte opbrengst van het netwerk wordt gemaximaliseerd en er wordt voldaan aan de capaciteitsbeperkingen van de verschillende legs.

De doelfunctie (1) hangt af van de verdelingen van de vraag. Daarom is het probleem moeilijk op te lossen. Om toepasbaar te zijn in de praktijk zijn relaxaties van deze formulering voorgesteld. In het volgende hoofdstuk zal gekeken worden naar deterministische en stochastische schattingsmethoden voor het netwerk revenue management probleem.

4. Boekingslimieten voor een netwerk

In dit werkstuk worden deterministische en stochastische schattingsmethoden behandeld om boekingslimieten voor een netwerk van vluchten te verkrijgen. De schattingsmethoden behandeld in paragraaf 4.1 en 4.2 gaan uit van mathematische programmering en zijn statisch. De boekingslimieten verkregen met deze methoden kunnen worden verbeterd met behulp van nesting, wat behandeld wordt in paragraaf 4.3. Een op simulatie gebaseerde methode om boekingslimieten te verkrijgen wordt behandeld in paragraaf 4.4. Dit is een dynamische methode.

4.1 Deterministische schattingsmethode

De eerdere formulering van het netwerkprobleem (1) kan worden benaderd door elke D_{ODF} te vervangen door de verwachte vraag ED_{ODF} . Dit resulteert in het deterministisch mathematisch programmeren probleem (Glover e.a. (1982)):

$$\begin{array}{ll} \text{Maximaliseer} & \sum_{ODF} f_{ODF} X_{ODF} & \text{(DMP)} \\ \text{Onder} & \sum_{ODF \in S_l} X_{ODF} \leq C_l & \text{voor elke } l \\ & X_{ODF} \leq ED_{ODF} & \text{voor elke ODF} \\ & X_{ODF} \geq 0 \text{ geheel} & \text{voor elke ODF.} \end{array}$$

Hiermee wordt per ODF de boekingslimiet bepaald. Men behandelt de vraag naar een ODF alsof het een vaste waarde heeft en informatie over de vraagverdeling wordt niet in beschouwing genomen. De methode produceert dus alleen een optimale toewijzing van stoelen als de *verwachte* vraag geheel overeenkomt met de *werkelijke* vraag.

Gebruikelijk is om de geheeltalligheidseis van de DMP methode weg te laten, omdat deze eis het moeilijk maakt het probleem op te lossen als het aantal beslissingvariabelen en restricties groot is. Deze worden bepaald door het aantal beschikbare stoelen in het netwerk, het aantal tariefklassen, en het aantal mogelijke passagiersroutes. De methode zonder geheeltalligheidseis wordt de DLP methode genoemd. Een getallenvoorbeeld van boekingslimieten verkregen met behulp van de DLP methode wordt gegeven in paragraaf 6.1.

4.2 Stochastische schattingsmethode

De DLP methode is deterministisch en zal nooit meer stoelen vasthouden voor de hoge tariefklasse dan de verwachte gemiddelde vraag. Om te kijken of het loont om meer stoelen vast te houden voor meer winstgevende tariefklassen, is het nodig het stochastische karakter van de vraag in de methode op te nemen. Dit kan met behulp van de EMR methode (Wollmer(1986)). Deze optimaliseringsmethode heeft binaire beslissingsvariabelen $X_{ODF}(i)$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximaliseer} & \sum_{ODF} \sum_i f_{ODF} P(D_{ODF} \geq i) X_{ODF}(i) & \text{(EMR)} \\
 \text{Onder} & \sum_{ODF \in S_l} \sum_i X_{ODF}(i) \leq C_l & \text{voor elke } l \\
 & X_{ODF}(i) \in \{0,1\} & \text{voor elke ODF,} \\
 & & i = 1, 2, \dots, \max_l \{C_l : ODF \in S_l\}.
 \end{array}$$

In dit model nemen de beslissingsvariabelen de waarde 1 aan als er i of meer stoelen voor de ODF gereserveerd worden, en 0 anders. De waarde van $X_{ODF}(i)$ in de doelfunctie geeft aan wat de verwachte bijkomende opbrengst van het toewijzen van een extra stoel aan een ODF zal zijn en houdt rekening met het feit dat $P(D_{ODF} \geq i) \geq P(D_{ODF} \geq i + 1)$. Een bezwaar tegen de methode is het grote aantal beslissingsvariabelen, wat de methode onpraktisch in gebruik maakt.

Zolang *nesting* strategieën, die in de volgende paragraaf worden besproken, niet worden toegepast, genereert de stochastische mathematische programmeringsmethode hogere opbrengsten dan de deterministische methode. Dit komt doordat er rekening wordt gehouden met het stochastische karakter van de vraag.

4.3 Nesting

De besproken boekingsmethoden kunnen verder worden verbeterd door het toepassen van nesting. Als er een aanvraag is voor een hoge tariefklasse, terwijl de limiet van deze klasse al is bereikt, zal deze aanvraag aan de hand van “gewone” boekingslimieten worden geweigerd, ook als de boekingslimiet van een lagere tariefklasse nog niet is bereikt. Dit is onlogisch. Boekingen van een hoge tariefklasse zouden altijd moeten worden geaccepteerd om de opbrengst te verhogen. Om dit mogelijk te maken worden boekingslimieten “genest”. Geneste boekingslimieten stellen een limiet aan de beschikbaarheid van stoelen op een hiërarchische wijze. Dit betekent dat elke type boeking voor

wie de boekingslimiet is bereikt, de stoelcapaciteit kan aanboren die gereserveerd is voor boekingen met een lagere waarde. Op deze manier is de geneste boekingslimiet voor de hoogste klasse gelijk aan de totale capaciteit van het vliegtuig. De geneste boekingslimiet voor de één na hoogste tariefklasse is de totale capaciteit van het vliegtuig minus de oorspronkelijke (niet-geneste) boekingslimiet voor de hoogste tariefklasse en zo verder.

4.3.1 Construeren van boekingslimieten met nesting

Nesting is een belangrijk aspect van het toewijzen van de stoelen. Als eerste moet een rangschikking worden bepaald, om te kijken welke ODF combinatie de grootste bijdrage aan de netwerkopbrengst levert.

Het rangschikken kan aan de hand van de tariefklassen, maar hierbij wordt niet het de gehele ticketprijs in acht genomen. Een passagier die een lange reis wil boeken zal een grotere bijdrage leveren dan iemand met een korte vluchtleg. Men zou ook kunnen rangschikken aan de hand van ticketprijzen. Hierbij zal een rangorde worden gemaakt met de hoogste prijzen bovenaan, terwijl met de bezettingsgraad ook rekening moet worden gehouden. Williamson (1992) oppert rangschikken aan de hand van de *schaduwprijs*. De schaduwprijs is verwachte toename in opbrengst als de vastgestelde hoeveelheid met één extra eenheid wordt verhoogd.

Bij de deterministisch schattingsmethode kan de schaduwprijs van het toewijzen van een extra stoel aan een ODF worden geschat. De ODF met de hoogste schaduwprijs voor de vraagrestrictie komt hierbij bovenaan in de rangorde.

De stochastische schattingsmethode wordt gekenmerkt door het feit dat het geen *vraagrestricties* heeft. Om toch een rangschikking te maken, kan men gebruik maken van de som van de schaduwprijzen van de *capaciteitsrestricties* van de legs die de ODF gebruikt. Een schatting van de netto bijdrage aan de netwerkopbrengst wordt dan verkregen door deze schaduwprijzen af te trekken van het tarief van de ODF.

De nesting rangorde wordt dan gebaseerd op:

$$\bar{f}_{ODF} = f_{ODF} - \sum_{l|ODF \in S_l} p_l$$

waarbij p_l de schaduwprijs is van de capaciteitsrestrictie van een vluchtleg l .

Deze methode kan zowel bij de stochastische als bij de deterministische methode worden toegepast en geeft bij de deterministische methode dezelfde resultaten als de rangschikkingmethode aan de hand van schaduwrijzen voor de vraagrestricties. Simulatie-experimenten van Williamson tonen aan dat schaduwrijzen de beste nestingstrategie bepalen.

Nadat er een nesting rangorde is vastgesteld kunnen geneste boekingslimieten worden bepaald.

$H_{ODF,l}$: groep ODF combinaties die een hogere positie hebben dan ODF op vluchtleg l .

De geneste boekingslimieten worden dan gegeven door:

$$b_{ODF,l} = C_l - \sum_{ODF^* \in H_{ODF,l}} X_{ODF^*}$$

Bovenstaande illustreert dat geneste boekingslimieten verkregen worden aan de hand van niet-geneste boekingslimieten, door toe te staan dat ODF combinaties gebruik maken van alle stoelen van de vluchtlegs, behalve de stoelen die gereserveerd zijn voor ODF combinaties van een hogere rang.

Aangezien de capaciteit, en daarom ook de geneste boekingslimiet, per leg wordt bepaald, kan het aantal stoelen dat beschikbaar is voor een ODF per leg verschillen. Hierdoor wordt een boekingsaanvraag alleen geaccepteerd als de geneste boekingslimieten van alle legs dit toestaan.

Geneste boekingslimieten hebben duidelijk een voordeel ten opzichte van niet-geneste boekingslimieten. Ze worden veel toegepast in de praktijk. Toch hebben ze ook hun tekortkomingen. Een optimale toewijzing van de stoelen, verkregen door een mathematische programmeringsmethode, wordt aangepast om nesting mogelijk te maken. Dit kan gemakkelijk leiden tot het beschermen van te veel meer winstgevende boekingsaanvragen. Omdat hoge tarief passagiers gebruik kunnen maken van stoelen die zijn toegewezen aan lagere tariefklassen, is het minder belangrijk geworden stoelen voor deze groep te beschermen. Een andere tekortkoming is dat een geneste boekingslimiet per vluchtleg wordt bepaald, terwijl de bijdrage van de nesting rangorde aan het h ele netwerk zou moeten worden beschouwd.

Onderzoek door Williamson (1992) naar de deterministische en de stochastische schattingsmethoden, die in paragraaf 4.1 en 4.2 zijn behandeld, toont aan dat, wanneer nesting wordt toegepast, een boekingsbeleid gebaseerd op de deterministische methode consequent hogere opbrengsten genereert dan een boekingsbeleid gebaseerd op de stochastische methode. Het blijkt dat de stochastische methode er meer last van heeft dat te veel stoelen worden beschermd voor de hogere tariefklassen.

Een getallenvoorbeeld van geneste boekingslimieten, die zijn afgeleid van de “gewone” boekingslimieten, wordt gegeven in paragraaf 6.1.1

4.4 Op simulatie gebaseerde boekingslimieten

De eerder besproken methoden op boekingslimieten te bepalen zijn statisch.

Bertsimas en de Boer (2000) stellen een dynamische methode voor, gebaseerd op simulatie, om boekingslimieten te bepalen. Als uitgangspunt heeft deze methode een geneste boekingsmethode. Die wordt bepaald aan de hand van de deterministisch mathematische programmeringsmethode (paragraaf 4.1). Daarna wordt het stochastische gradient algoritme gebruikt om boekingslimieten te verbeteren.

Stochastische Gradient Algoritme:

- Simuleer het boekingsproces voor een gegeven verzameling boekingslimieten
- Als een boekingslimiet wordt bereikt, kijk dan wat er zou gebeuren als deze boekingslimiet één stoel meer zou bevatten
- Gebruik deze informatie om telkens weer de boekingslimieten aan te passen

Dit algoritme is efficiënt aangezien alleen de relevante boekingslimieten worden aangepast.

De methode is zo ontworpen dat het altijd tot verbeteringen zou moeten leiden ten opzichte van de geneste boekingslimieten. Experimenten aan de hand van simulatie suggereren dat deze methode inderdaad mogelijk betere opbrengsten oplevert dan geneste boekingslimieten. Verder tonen simulaties aan dat deze methode qua berekeningen uitvoerbaar is voor netwerken van realistische grootte.

5. Bid prices

Door het stellen van bid prices wordt er een biedprijs vastgesteld voor elke leg in het netwerk die de schaduwprijs van een stoel weergeeft. Een boekingsverzoek wordt alleen geaccepteerd als de opbrengst groter is dan de som van de biedprijzen van de legs die gebruikt worden. Er zijn verschillende manieren om de “ware” biedprijs van een reisroute in een netwerk te schatten. Het kan aan de hand van de schaduwprijs van de capaciteitsrestrictie van de leg in een mathematisch programmeringsmethode zoals besproken in hst 4. De schaduwprijs van een capaciteitsrestrictie is verwachte toename in opbrengst als de capaciteit van een leg met één extra stoel wordt verhoogd. Nadat de schaduwprijzen zijn verkregen is het de regel om een boekingsaanvraag te accepteren als:

$$f_{ODF} > \sum_{ODF \in S_l} p_l$$

Een boekingsverzoek wordt dus alleen geaccepteerd als de tariefprijs ervan groter is dan de som van de schaduwprijzen van de capaciteitsrestricties van de legs die gebruikt worden voor die reis.

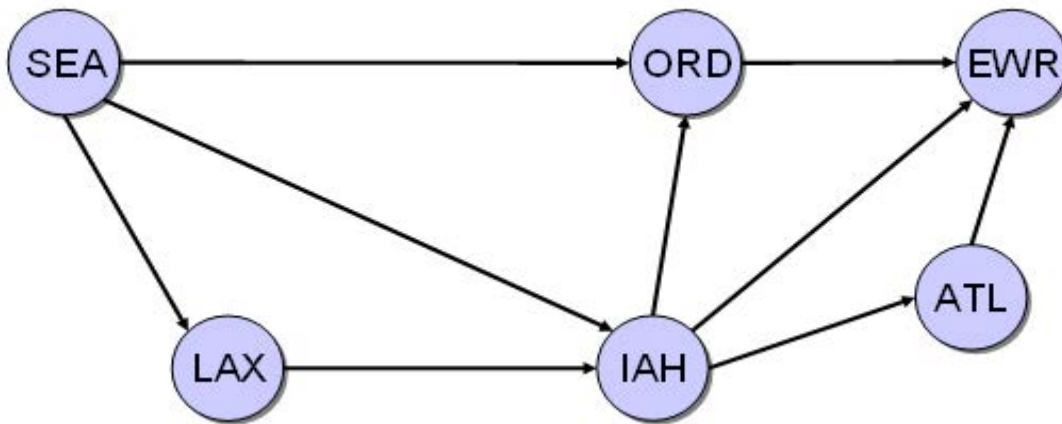
Een bezwaar tegen de bid price benadering is dat de biedprijzen continue moeten worden aangepast. Het heeft ook een erg overtuigend voordeel: het vervangt veelvoudige boekingslimieten en complexe nestingssystemen door een eenvoudige biedprijs voor elke vluchtleg en een simpele regel voor wanneer een reisroute afgewezen of geaccepteerd moet worden. Verder heeft deze methode uitstekende opbrengstprestaties. Williamson toont met behulp van simulatie aan dat als biedprijzen vaak worden aangepast, bid prices en geneste boekingslimieten leiden tot vergelijkbare resultaten.

Een getallenvoorbeeld van bid prices wordt gegeven in paragraaf 6.2.

6. Een voorbeeld

In Excel heb ik met behulp van Solver de DLP methode toegepast om boekingslimieten te krijgen voor een klein netwerk van vluchten met twee tariefklassen. Hierna heb ik de schaduwrijzen berekend om de nesting rangorde te bepalen. Aan de hand van de rangorde worden in paragraaf. 6.1.1 de geneste boekingslimieten bepaald. In paragraaf 6.2 worden de bid prices bepaald.

Ik ga uit van een luchtvaartmaatschappij met de volgende vluchten:



Figuur 1. Een netwerk van vluchten

Passagiers die bijvoorbeeld van SEA naar EWR willen vliegen, reizen via twee legs, SEA-ORD en ORD-EWR, en zitten in dezelfde vlucht als de passagiers die alleen SEA-ORD of ORD-EWR vliegen. Er wordt dus geconcurrerd om dezelfde capaciteit van stoelen op een vlucht. De luchtvaartmaatschappij moet beslissen welke aanvraag geaccepteerd wordt om de opbrengst te maximaliseren.

Capaciteit per leg:

van	naar	Capaciteit	Schaduwrijns capaciteitsrestrictie
SEA	LAX	200	100
SEA	IAH	300	150
SEA	ORD	200	120
LAX	IAH	250	100
IAH	ORD	250	100
IAH	EWR	250	120
IAH	ATL	200	100
ORD	EWR	300	80
ATL	EWR	150	100

Tabel 1. Capaciteit per leg en schaduwrijzen capaciteitsrestricties

6.1 Boekingslimieten

Reismogelijkheden							Boekingslimiet per tariefklasse		Schaduwprijs vraagrestrictie	
van	via	naar	Tarief laag	E(D) laag	Tarief hoog	E(D) hoog	laag	hoog	laag	hoog
SEA	ORD	LAX	100	200	300	40	160	40	0	200
		IAH	150	200	300	40	140	40	0	150
		ORD	120	200	300	40	100	40	0	180
		EWR	200	200	400	40	20	40	0	200
		IAH	250	200	500	40	80	40	0	250
LAX	IAH	IAH	100	200	200	40	0	40	0	100
		ORD	200	200	400	40	90	40	0	200
		EWR	200	200	350	40	0	40	0	130
		ATL	200	200	350	40	0	40	0	150
IAH		ORD	100	200	150	40	80	40	0	150
		EWR	120	200	200	40	170	40	0	80
		ATL	100	200	170	40	0	40	0	70
ORD		EWR	150	200	300	40	200	40	70	220
ATL		EWR	100	200	200	40	110	40	0	100
De maximale opbrengst: 325.200 Euro										

Tabel 2. Tarieven en verwachte vraag met als resultaat boekingslimieten en schaduwprizen

Met behulp van de DLP methode worden, aan de hand van de tarieven van de hoge en de lage tariefklasse, de capaciteit per leg en de verwachte vraag per tariefklasse, de boekingslimieten van de tariefklassen berekend, zodanig dat deze een zo hoog mogelijke verwachte opbrengst opleveren. Als de uiteindelijke vraag overeen komt met de verwachte vraag en deze boekingslimieten worden gehanteerd, zal de opbrengst 325.200 Euro zijn, zie tabel 2.

Om een voorbeeld te laten zien van het netwerkeffect vergelijk ik twee ODF's uit tabel 2:

- SEA → ORD → EWR , lage tariefklasse, prijs: 200 Euro, boekingslimiet: 20
- ORD → EWR , lage tariefklasse, prijs: 150 Euro, boekingslimiet: 200

De passagiers die SEA → ORD → EWR reizen, zitten het tweede gedeelte van de reis in dezelfde vlucht als de passagiers die alleen ORD → EWR reizen. De reis SEA → ORD → EWR (laag tarief) heeft een hogere prijs dan ORD → EWR (laag tarief). Toch heeft de laatste een veel hogere boekingslimiet. Dit is een gevolg van het feit dat het hele netwerk van vluchten in beschouwing wordt genomen om de optimale opbrengst te bepalen.

Zoals in hoofdstuk 4 behandeld, kan deze verwachte opbrengst verder worden verhoogd met behulp van geneste boekingslimieten. Dit wordt behandeld in paragraaf 6.1.1.

6.1.1 Nesting

Het idee van nesting is dat het zonde zou zijn die boekingen te weigeren die een hoge bijdrage leveren aan de netwerkopbrengst als er nog stoelen beschikbaar zijn. Om te zorgen dat ODF's met een hoge rangorde meer stoelen in het vliegtuig kunnen reserveren dan er in tabel 2 als boekingslimiet is vastgesteld, moet er aan de hand van de bijdrage aan de netwerkopbrengst van een ODF een rangorde worden vastgesteld. Om de rangorde vast te stellen zijn de schaduw prijzen van de vraag- en capaciteitsrestricties nodig. Deze worden verkregen met behulp van de DLP methode. De schaduw prijzen van de vraagrestricties worden verkregen door de toename in opbrengst vast te stellen, die wordt verkregen door de *verwachte vraag* met één eenheid te verhogen. De schaduw prijzen van de capaciteitsrestricties worden verkregen door de toename in opbrengst vast te stellen, die wordt verkregen door de *vastgestelde capaciteit* met één eenheid te verhogen. De schaduw prijzen zijn te vinden in tabel 1 en tabel 2.

Met behulp van schaduw prijzen van de vraagrestricties of met behulp van de schaduw prijzen van de capaciteitsrestricties, krijgen we een nesting rangorde als in tabel 3:

	Van	Naar	Tariefklasse	Schaduw prijs vraagrestrictie	Tarief ODF minus schaduw prijs cap.restrictie
1	SEA	ALT	Hoog	250	250
2	ORD	EWR	Hoog	220	220
3	SEA	LAX	Hoog	200	200
4	SEA	EWR	Hoog	200	200
5	LAX	ORD	Hoog	200	200
6	SEA	ORD	Hoog	180	180
7	SEA	IAH	Hoog	150	150
8	LAX	ALT	Hoog	150	150
9	IAH	ORD	Hoog	150	150
10	LAX	EWR	Hoog	130	130
11	LAX	IAH	Hoog	100	100
12	ALT	EWR	Hoog	100	100
13	IAH	EWR	Hoog	80	80
14	IAH	ALT	Hoog	70	70
15	ORD	EWR	Laag	70	70
Gevolgd door alle andere ODF's ...					

Tabel 3. Nesting rangorde

De geneste boekingslimieten worden vervolgens verkregen aan de hand van niet-geneste boekingslimieten (Tabel 2) door toe te staan dat ODF combinaties gebruik maken van alle stoelen in het vliegtuig, behalve de stoelen die gereserveerd zijn voor een ODF van een hogere rang:

$$b_{ODF,l} = C_l - \sum_{ODF^* \in H_{ODF,l}} X_{ODF^*}$$

Dus de geneste boekingslimieten van zijn van de ODF's op de vluchtlegs zijn:

SEA, ALT, Hoog op vluchtleg SEA, IAH:	300
SEA, ALT, Hoog op vluchtleg IAH, ALT:	200
ORD, EWR, Hoog op vluchtleg ORD, EWR:	300
SEA, LAX, Hoog op vluchtleg SEA, LAX:	200
SEA, EWR, Hoog op vluchtleg SEA, ORD:	200
SEA, EWR, Hoog op vluchtleg ORD, EWR:	260
LAX, ORD, Hoog op vluchtleg LAX, IAH:	250
LAX, ORD, Hoog op vluchtleg IAH, ORD:	250
SEA, ORD, Hoog op vluchtleg SEA, ORD:	160
SEA, IAH, Hoog op vluchtleg SEA, IAH:	260
LAX, ALT, Hoog op vluchtleg LAX, IAH:	210
LAX, ALT, Hoog op vluchtleg IAH, ALT:	160
IAH, ORD, Hoog op vluchtleg IAH, ORD:	210
LAX, EWR, Hoog op vluchtleg LAX, IAH:	170
LAX, EWR, Hoog op vluchtleg IAH, EWR:	250
LAX, IAH, Hoog op vluchtleg LAX, IAH:	130
ALT, EWR, Hoog op vluchtleg ALT, EWR:	150
IAH, EWR, Hoog op vluchtleg IAH, EWR:	110
IAH, ALT, Hoog op vluchtleg IAH, ALT:	120
ORD, EWR, Laag op vluchtleg ORD, EWR:	220
SEA, ALT, Laag op vluchtleg SEA, IAH:	220
Enzovoort...	

Tabel 4. Geneste boekingslimieten

Als er meer boekingsaanvragen zijn voor een ODF met een hoge bijdrage aan de netwerkopbrengst (hoge rang) dan is voorspeld in tabel 2, zal de opbrengst door het toepassen van geneste boekingslimieten hoger worden dan de in tabel 2 berekende maximale opbrengst.

6.2 Bid Prices

De schaduwrijzen van de capaciteitsrestricties, die aan de hand van de DLP methode voor onze virtuele luchtvaartmaatschappij zijn bepaald, zijn nodig om bid prices vast te stellen. De regel is om een boekingsaanvraag voor een ODF te accepteren als geldt:

$$f_{ODF} > \sum_{ODF \in S_i} p_i$$

Dus de bid prices zijn:

SEA, ALT, Hoog / Laag wordt geaccepteerd als de tariefprijs hoger is dan:	150 + 100 = 250
ORD, EWR, Hoog / Laag wordt geaccepteerd als de tariefprijs hoger is dan:	80
SEA, LAX, Hoog / Laag wordt geaccepteerd als de tariefprijs hoger is dan:	100
SEA, EWR, Hoog / Laag wordt geaccepteerd als de tariefprijs hoger is dan:	120 + 80 = 200
LAX, ORD, Hoog / Laag wordt geaccepteerd als de tariefprijs hoger is dan:	100 + 100 = 200
SEA, ORD, Hoog / Laag wordt geaccepteerd als de tariefprijs hoger is dan:	120
enzovoort..	

Tabel 5. Bid prices

Dit zijn de biedprijzen aan het begin van de boekingsperiode. Als deze prijzen de gehele boekingsperiode worden aangehouden, betalen alle passagiers op een leg hetzelfde tarief. Dit is niet optimaal. De bid prices moeten continue worden aangepast om nieuwe gegevens over de capaciteitsrestricties, de tijd tot vertrek en de vraag naar stoelen te verwerken, om verschillende tariefklassen op de vlucht te krijgen.

Als bid prices vaak worden aangepast zullen boekingslimieten en bid prices vergelijkbare opbrengstresultaten genereren.

7. Conclusie

Op het gebied van single leg boekingsystemen is de literatuur redelijk eensgezind, op het verschil tussen statische en dynamische methoden na. Er is een zekere overeenstemming over hoe verdere verbeteringen in de methoden moeten worden verkregen. Men probeert de bestaande modellen uit te breiden om hierin belangrijke aspecten zoals overboeken, groepsboekingen en een kleinere afhankelijkheid van de vraagvoorspellingen te kunnen opnemen.

Het netwerkprobleem wordt daarentegen op een aantal uiteenlopende manieren benaderd. Twee populaire boekingsbeleid tactieken zijn boekingslimieten en bid prices. Er is gebleken dat beide manieren ongeveer dezelfde verwachte opbrengst genereren.

Een boekingsbeleid aan de hand van boekingslimieten kan statisch of dynamisch zijn. Twee statische methoden zijn behandeld, een deterministische en een stochastische. Deze methoden zijn verkregen aan de hand van mathematische programmering, aangezien hierbij het netwerk van vluchten in het geheel wordt beschouwd en er goed kan worden herkend welke reisroutes de grootste bijdrage leveren aan de opbrengst van de luchtvaartmaatschappij. De stochastische methode genereert betere opbrengstresultaten, aangezien er hierbij rekening wordt gehouden met het stochastische karakter van de vraag. Nesting wordt toegepast om de boekingslimieten te verbeteren en de opbrengsten van de luchtvaartmaatschappij te verhogen.

Ook is er een dynamische schattingsmethode om boekingslimieten te verkrijgen behandeld. Deze methode is gebaseerd op simulatie en is zo ontworpen dat het altijd tot verbeteringen zou moeten leiden ten opzichte van de statische geneste boekingslimieten.

Bid prices zijn veel eenvoudiger te implementeren dan boekingslimieten, aangezien er maar één drempelwaarde hoeft te worden opgeslagen voor elke vlucht, terwijl bij de andere methode boekingslimieten voor alle mogelijke boekingsklassen moeten worden opgeslagen. Een nadeel van bid prices is dat zij continue moeten worden bijgewerkt om tot optimale opbrengsten te leiden.

Het is zeer belangrijk om netwerk revenue management toe te passen aangezien dit hogere opbrengsten voor een luchtvaartmaatschappij genereert dan single leg revenue management.

Literatuur

- Belobaba, P.P. (1987), Air Travel Demand and Airline Seat Inventory Management, PhD. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Belobaba, P.P. (1989), Application of a probabilistic decision model to airline seat inventory control, *Operations Research*, **37**, 183-197.
- Bertsimas, D. en de Boer, S.V. (2000), Simulation-Based Booking Limits for Airline Revenue Management, Working Paper, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Carroll, W.J. en Grimes, R.C. (1995), Evolutionary change in product management experiences in the car rental industry, *Interfaces*, **25:5**, 84-104.
- Chen, V.C.P., Günter, D. en Johnson, E.L. (1998), A Markov Decision Problem Based Approach to the Airline YM Problem, Working Paper, The Logistics Institute, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA.
- de Boer, S.V., Freling, R. en Piersma, N. (2002), Mathematical programming for network revenue management revisited, *European Journal of Operational Research*, **137**, 72-92
- Glover, F., Glover, R., Lorenzo, J. en McMillan, C. (1982), The passenger mix problem in the scheduled airlines, *Interfaces* **12**, 73-79.
- Lee, T.C. en Hersh, M. (1993), A model for dynamic airline seat inventory control with multiple seat bookings, *Transportation Science*, **27**, 252-265.
- Leibs, S. (2000), Aided by New Software, the Automaker is Using Revenue Management to Boost the Bottom Line, *CFO Magazine*, August 2000.
- Littlewood, K. (1972), Forecasting and Control of Passenger Bookings, *AGIFORS Symposium Proceedings*, **12**, 95-117.
- McGill, J.I. en van Ryzin, G.J. (1999), Revenue Management: Research Overview and Prospects. *Transportation Science*, **33**, 233-256.
- Pak, K. (2005), Revenue Management: New Features and Models, Erasmus Research Institute of Management 61, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands.
- Pak, K. en Piersma, N. (2002), Overview of OR Techniques for Airline Revenue Management, *Statistica Neerlandica*, **56**, 480-496.
- Smith, B.C., Leimkuhler, J.F. en Darrow, R.M. (1992), Yield management at American Airlines, *Interfaces*, **22:1**, 8-31.
- Williamson, E.L. (1992), Airline Network Seat Inventory Control: Methodologies and Revenue Impacts, PhD. Thesis, Flight Transportation Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Wollmer, R.D. (1986), A hub-spoke seat management model. Unpublished Internal Report, Mc Donnell Douglas Corporation, Long Beach, CA.