EVALUATIE VAN RISICOMAATSTAVEN

Anti-VaR

T.R. Bank
1114271
trbank@few.vu.nl

Bedrijfswiskunde & Informatica

April 2007

vrije Universiteit *amsterdam*

INTENTIONALLY LEFT BLANK

Voorwoord

Aan het eind van de master Bedrijfswiskunde & Informatica schrijven BWI-studenten een werkstuk met als doel om voor een deskundige manager op een heldere wijze verslag te doen van een bepaald onderwerp of probleem.

Het onderwerp van dit werkstuk is gebaseerd op een artikel genaamd *Coherent Measures of Risk* uit 1998, geschreven door P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber en D. Heath.

Het onderwerp is mij aangereikt door Dr. J.H. van Zanten, waarvoor dank, en daarnaast wil ik Dr. S. Bhulai hartelijk danken voor zijn begeleiding van dit werkstuk.

Terrence Bank
Amsterdam, april 2007

Samenvatting

Financieel risico is één van de bedrijfsrisico's waar investeerders mee te maken hebben. Onderdeel van het financieel risico is het marktrisico, de onzekerheid over de waarde van investeringen in de toekomst. De drie meest gebruikte risicomaatstaven om dit marktrisico te kwantificeren worden in dit werkstuk behandeld. Dit zijn de value-at-risk (VaR), het margin system SPAN en de SEC margin rules. Daarnaast zal gekeken worden welke risico's men loopt bij met name het gebruik van de VaR.

De risicomaatstaven berekenen een hoeveelheid extra kapitaal die benodigd is om een portfolio voldoende tegen het marktrisico te beschermen. Deze hoeveelheid extra kapitaal wordt de margin genoemd.

De value-at-risk berekent de margin aan de hand van het maximale verwachte verlies van een portfolio bij een bepaalde betrouwbaarheid en kan berekend worden volgens drie methodes: De historische methode, de parametrische methode en de Monte Carlo simulatie. De grote kracht van de VaR is dat het toepasbaar is op alle financiële instrumenten.

Het margin system SPAN, standard portfolio analysis of risk, is puur gericht op het marktrisico van opties. De berekening gebeurt aan de hand van 16 risicoscenario's waarna er gekeken wordt naar het maximum van het verwachte verlies van alle 16 scenario's.

Bij de SEC margin rules wordt er geen gebruik gemaakt van stochastische variabelen. Er wordt een decompositie van spreads van de portfolio gemaakt. Aan elke spread wordt vervolgens een margin toegewezen waarvan de som de totale margin bepaalt. Ook deze methode is alleen geschikt voor opties.

Er bestaan vier gewenste eigenschappen voor een risicomaatstaf. Als aan alle vier de eigenschappen wordt voldaan, wordt een risicomaatstaf coherent genoemd. Deze eigenschappen zijn:

I. Translation invariance
II. Subadditivity
III. Positive homogeneity
IV. Monotonicity

Van de drie behandelde methodes kan alleen het SPAN margin system coherent genoemd worden. Ondanks het feit dat de SEC margin rules ook aan alle vier de eigenschappen voldoet, worden er bij de bepaling van de

margin teveel (onrealistische) scenario's beschouwd. Voor de VaR geldt dat deze niet aan de eigenschap van subadditivity voldoet.

Het gebrek aan subadditivity van de VaR kan tot zeer ongewenste situaties leiden doordat bijvoorbeeld de margin van twee aparte investeringen kleiner blijkt dan de margin van die twee investeringen samen. Dit terwijl diversificatie het risico juist zou moeten spreiden en dus een lagere margin zou moeten vereisen. Een ander nadeel van de VaR is dat het zich slechts bezighoudt met de kansen op verlies en niet met de grootte ervan. Dit komt ook doordat er bij deze methode van wordt uitgegaan dat de marktrisicofactoren normaal verdeeld zijn.

Een alternatief voor de value-at-risk die wel coherent is, zou de expected shortfall kunnen zijn. Deze methode geeft het verwachte verlies over een bepaald betrouwbaarheidsinterval. Dit in tegenstelling tot de VaR welke het minimale verlies over een bepaald betrouwbaarheidsinterval geeft. Deze risicomaatstaf is ook toepasbaar op alle financiële instrumenten.

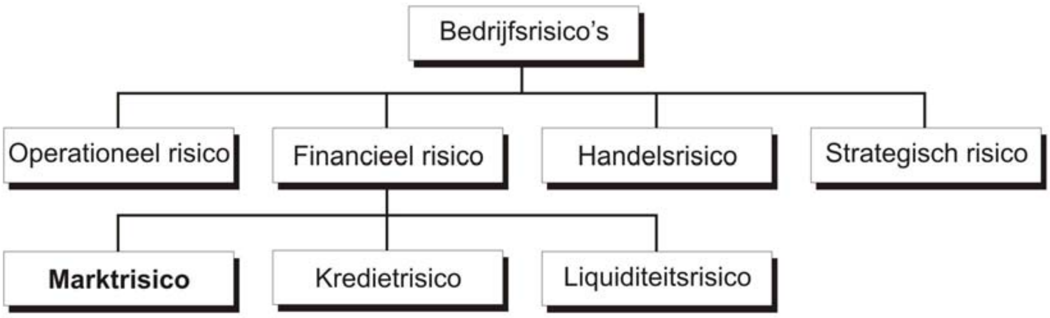
Het gebruik van de value-at-risk wordt tegenwoordig alleen toegestaan indien er onder andere gebruik wordt gemaakt van extra veiligheidsfactoren. Omdat het margin system SPAN en de SEC margin rules slechts geschikt zijn voor het gebruik bij opties lijkt de expected shortfall een coherent alternatief om marktrisico's te kwantificeren.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Financieel risico kan gedefinieerd worden als de onverwachte volatiliteit van opbrengsten van een bepaalde investering en kan dus zowel potentieel lagere als hogere opbrengsten opleveren dan verwacht. Voor investeringen worden vaak portfolio's samengesteld welke een verzameling zijn van activa zoals aandelen, obligaties en opties. Met de volatiliteit wordt de standaard deviatie of verandering in waarde van zulke financiële instrumenten bedoeld.

Bedrijfsactiviteiten gaan gepaard met verschillende vormen van risico waaronder ook financieel risico. Eén van de financiële risico's betreft het marktrisico (zie figuur 1). De huidige waarde van een portfolio wetende, is het marktrisico de onzekerheid over de marktwaarde van deze portfolio in de toekomst. Het kwantificeren van die onzekerheid kan vaak noodzakelijk zijn als men wil investeren. Voor het schrijven van opties eisen toezichthouders bijvoorbeeld dat de investeerder over genoeg liquide middelen beschikt om eventuele verliezen te dekken.



Figuur 1: Verschillende vormen van risico

In dit werkstuk zullen drie methodes behandeld worden die momenteel het meest gebruikt worden om het marktrisico van portfolio's te kwantificeren. Deze methodes worden risicomaatstaven genoemd en worden gebruikt voor het berekenen van een hoeveelheid extra kapitaal die voor een onderneming (of andere investeerders) vereist is om voldoende, bij een bepaalde betrouwbaarheid, tegen het marktrisico beschermd te zijn. Deze hoeveelheid extra kapitaal wordt ook wel de margin genoemd en dient om de eventuele financiële tegenslagen in de markt op te vangen.

De eerste risicomaatstaf die behandeld zal worden is de value-at-risk (VaR) welke reeds veel gebruikt wordt in het bankwezen, bij verzekeringsbedrijven en andere handelsorganisaties. De VaR is de enige van de drie behandelde risicomaatstaven die op kwantielen gebaseerd is en dus met een betrouwbaarheidsinterval werkt. Hij kan op meerdere manieren berekend worden maar de berekening is altijd gebaseerd op de kansverdeling van de toekomstige marktwaarde van een portfolio. Het grote voordeel van deze methode is zijn algemeenheid, alle liquide activa bevatten onzekerheid omtrent hun toekomstige marktwaarde wat met een kansverdeling gekarakteriseerd kan worden.

Een tweede methode om de vereiste margin voor een portfolio te berekenen is het margin system SPAN (Standard Portfolio ANalysis of risk), ontwikkeld door de Chicago Mercantile Exchange. Deze methode is alleen geschikt voor opties en futures en heeft dus een wat kleiner toepassingsgebied dan de VaR. Er worden hier verschillende scenario's beschouwd waarvoor met een options pricing model de theoretische toekomstige waarde van de opties in de portfolio worden berekend. Hierbij bestaat de margin uit het maximum van het verwachte verlies van alle scenario's.

De derde en laatste methode die in dit werkstuk aan bod komt, is de margin rules van de Securities and Exchange Commission (SEC). Deze methode lijkt op die van het margin system SPAN maar de bepaling van de margin geschiedt hier op basis van een decompositie van spreads in de betreffende portfolio.

Eerst zullen in dit werkstuk de genoemde methodes wat uitgebreider behandeld worden en zal gekeken worden naar de toepasbaarheid van de drie risicomaatstaven. Daarna zullen de eigenschappen die een goede risicomaatstaf behoort te hebben, genoemd worden. Risicomaatstaven die aan deze eigenschappen voldoen worden coherent genoemd. In de bestudeerde literatuur wordt dit als een belangrijke eigenschap beschouwd voor de betrouwbaarheid van een risicomaatstaf. Centraal in dit werkstuk zal staan of de hiervoor genoemde maatstaven coherent zijn en zo niet, wat de gevolgen daarvan zijn. Hierbij zal voornamelijk gekeken worden naar de value-at-risk daar dit één van de meest gebruikte risicomaatstaven is in de financiële wereld. Tot slot zullen nog wat aanbevelingen gedaan worden.

2 Risicomaatstaven

De margin is dus de hoeveelheid extra kapitaal die een onderneming nodig heeft om zijn investeringsportfolio voldoende tegen het marktrisico te beschermen. Ter berekening van deze margin kan de eindwaarde van een portfolio beschouwd worden als een stochastische variabele X. De vereiste margin voor het samenstellen van deze portfolio kan dan aangeduid worden door de waarde $\rho(X)$. Beschouw dit als de margin die door de maatstaf ρ aan risico X toegewezen wordt.

Als de berekende margin positief is, wordt dit gezien als de minimum hoeveelheid kapitaal dat een investeerder beschikbaar moet hebben voor het samenstellen van deze portfolio. Hiermee zorgt de investeerder ervoor dat hij kan voldoen aan de financiële verplichtingen in het geval dat de markt tegen hem werkt, een soort garantie dus.
Indien de margin $\rho(X)$ een negatieve waarde krijgt is, is het marktrisico van de portfolio zodanig dat er geen extra kapitaal beschikbaar hoeft te zijn. De onderneming kan nu bijvoorbeeld besluiten om meer risico te nemen.

Over het algemeen worden de vereiste margins door de onderneming geïnvesteerd in veilige instrumenten zoals staatsobligaties zodat hierop nog een rendement gehaald wordt. Dit rendement r wordt dan ook meegenomen in de berekening van de vereiste margin. Om de margin daadwerkelijk te berekenen zijn er op dit moment voornamelijk drie risicomaatstaven die in de financiële wereld gebruikt worden, te weten de value-at-risk, het margin system SPAN en de SEC margin rules.

2.1 Value-at-Risk

De risicomaatstaf value-at-risk (VaR) berekent de margin op basis van het verwachte maximale verlies over een bepaalde tijdsperiode met een bepaalde mate van betrouwbaarheid. Het verwachte maximale verlies wordt berekend aan de hand van de kansverdeling van de toekomstige waarde van een portfolio. Er wordt naar de portfolio gekeken op het tijdshorizon $(0,T)$ waarbij er van wordt uitgegaan dat de verdeling van de toekomstige marktwaarde bekend is. Verder maakt de methode gebruik van de kwantiel $\alpha \in [0,1]$.

De VaR op niveau α van ΔX, het verschil tussen de eindwaarde en beginwaarde van een portfolio, is zodanig gedefinieerd dat er een margin van x vereist is zodat in $(1-\alpha)\%$ van de gevallen het verlies in waarde van de portfolio op het tijdshorizon $(0,T)$ kleiner is dan deze margin van x.

In formulevorm ziet de VaR eruit als volgt:

$$VaR_{\alpha}(X) = -\inf\{x \mid P(\Delta X \le x \cdot (1+r)) > \alpha\}$$

Zo kan bijvoorbeeld een 5 dagen 1% VaR van 1000 als volgt gezien worden: gezien de huidige marktsituatie, kan men met 99% betrouwbaarheid zeggen dat het verlies in waarde van de betreffende portfolio over 5 dagen niet groter zal zijn dan 1000.

De VaR kan ook uitgedrukt worden in percentages en kan geïnterpreteerd worden als de hoeveelheid extra kapitaal (margin) dat een onderneming nodig heeft om de kans dat het failliet gaat, te reduceren tot α%. De value-at-risk methode wordt door de meeste banken en beurstoezichthouders als beste risicomaatstaf beschouwd vanwege zijn eenvoud en grote toepasbaarheid.

In de praktijk wordt als tijdshorizon vaak een periode van 1 tot 10 dagen (2 weken) gekozen en het niveau α zal betrekkelijk laag zijn: 0.5%, 1% of 5%.

In het zogenaamde akkoord van Basel ([8]) is o.a. voorgesteld dat het vereiste kapitaal voor individuele banken voor de komende 10 dagen met een VaR berekend zou moeten worden met een α van 1% op basis van de historische data van minimaal een jaar, vermenigvuldigd met een factor van minimaal 3. Dit is een veiligheidsfactor omdat men zich realiseerde dat de algemeen gebruikte normale verdeling onrealistisch is en dat een jaar aan historische data eigenlijk te weinig is. Er wordt daarom wel gepleit voor het gebruik van andere verdelingen met zwaardere staarten zoals een t-verdeling. Deze zou beter rekening houden met extremere scenario's. Vooralsnog staat het Comité van Basel[1] alleen het gebruik van de normale verdeling toe.

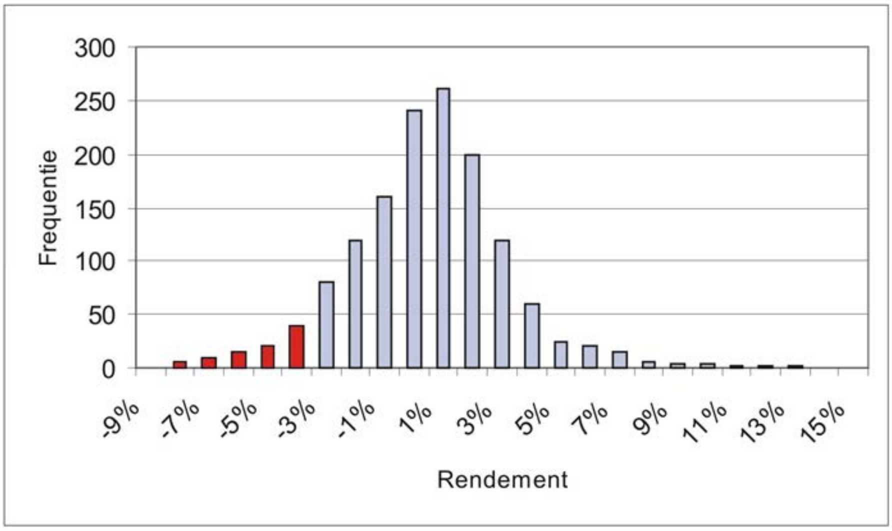
Om de VaR te berekenen bestaan er drie methodes die hierna behandeld zullen worden: De historische methode, de parametrische methode en de Monte Carlo simulatie.

1. **Historische methode**

   Bij de historische methode wordt de VaR geschat op basis van actuele historische gegevens en worden portfolio's dagelijks hergewaardeerd voor elke verandering in de markt. De methode gaat ervan uit dat de

[1] Het Comité van Basel is in 1974 opgericht door de voorzitters van de centrale banken van de landen van de G10. Deze instelling houdt zich o.a. bezig met het opstellen van richtlijnen voor het toezicht houden in de financiële wereld. De huidige voorzitter is Nout Wellink van De Nederlandsche Bank.

geschiedenis zich herhaalt, de opbrengsten worden gerangschikt van laag tot hoog waaruit het gewenste percentage VaR berekend kan worden. In figuur 2 is een 5% VaR te zien waarbij de 5% laagste rendementen tussen de –3 en –7% liggen. Met 95% zekerheid kan dus gezegd worden dat het rendement niet lager dan –3% zal zijn.

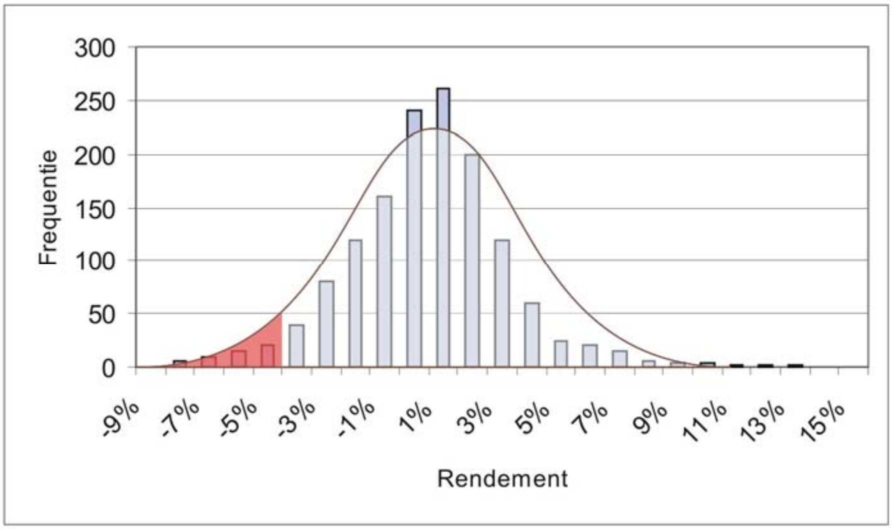


Figuur 2: Histogram met verwachte opbrengsten van een portfolio

Deze methode is geschikt voor alle instrumenten en voorziet in een volledige verdeling van potentiële portfoliowaarden in plaats van specifieke percentielen en er hoeven geen aannames gemaakt te worden wat betreft de verdeling van de data. Deze methode is sneller dan de Monte Carlo simulatie omdat er minder scenario's gebruikt worden maar het vereist nog steeds veel rekenwerk. Een nadeel is dat er dagelijks voldoende historische data vereist is. Verder kan ver terugrekenen voor problemen zorgen als de data irrelevant geworden is door bijvoorbeeld devaluatie van valuta. Zo is het ook moeilijk om ver in de toekomst te kijken. Tot slot is verificatie van de resultaten bij hogere betrouwbaarheid (vanaf 99%) moeilijker omdat van extreme scenario's weinig gegevens bekend zijn.

2. **Parametrische methode**

Bij de parametrische methode, ook wel de variantie/covariantie methode genoemd, wordt de VaR bepaald met gebruik van een schatting voor de gemiddelde opbrengst en standaard deviatie. Dit is een snelle en simpele berekening waarvoor geen historische data vereist is, de methode gaat er van uit dat de opbrengsten normaal verdeeld zijn. De VaR is dan bijvoorbeeld de 5% laagste opbrengst van de grafiek van de normale verdeling (zie figuur 3). Deze methode is geschikt voor lineaire instrumenten maar minder geschikt voor niet-lineaire portfolio's of bij asymmetrische verdelingen.

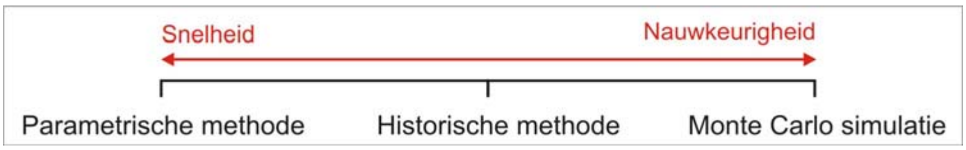


Figuur 3: Normale verdeling met geschatte parameters en 5% VaR

3. **Monte Carlo simulatie**

De Monte Carlo methode schat de VaR door simulatie van random scenario's en herwaardering van portfolio's. Ook hier is geen historische data voor vereist. Deze methode is geschikt voor alle instrumenten en voorziet ook in een volledige verdeling van potentiële portfoliowaarden. Verder is het mogelijk om verschillende aannames te doen wat betreft de verdeling van de data. Een nadeel van deze aanpak is dat het rekenintensief is en tijdrovend omdat voor elk scenario de portfolio's geherwaardeerd moeten worden. Daarnaast kan onzekerheid over de verdeling van de data nadelige gevolgen hebben.

Samengevat kunnen de drie methodes als volgt worden onderscheiden in snelheid en nauwkeurigheid:



Per situatie zal bekeken moeten worden wat de meest geschikte methode is. Dit hangt onder andere af van de samenstelling van de portfolio.

2.2 Margin system SPAN

Het meest gebruikte margin system voor optiehandelaren staat bekend als SPAN, standard portfolio analysis of risk. Deze methode is gebaseerd op een verzameling algoritmes dat de margin bepaalt op basis van het totale risico van een portfolio over één dag.
Het wordt ook wel option margin genoemd en hiermee wordt simpelweg bedoeld de hoeveelheid kapitaal dat een optiehandelaar op z'n rekening moet hebben staan om in opties en futures te kunnen handelen. Men moet dit niet verwarren met een margin voor aandelen wat een lening is zodat je meer aandelen kunt kopen met minder beschikbaar kapitaal. Hieruit blijkt ook gelijk een groot verschil met de value-at-risk welke toegepast kan worden op alle liquide activa, SPAN is alleen geschikt voor opties.
Een margin system is dus eigenlijk een financiële garantie dat men aan de contractverplichtingen kan voldoen in het geval dat de markt tegen je werkt. De margin is alleen vereist voor futures en het *schrijven* van opties. Het maximale risico dat je loopt bij het *kopen* van opties is namelijk gelijk aan de prijs van die opties. Verder is het verschil tussen futures en opties dat opties je het recht geven om op een bepaald tijdstip in de toekomst een aandeel of andere onderliggende waarde voor een bepaalde prijs te kopen of verkopen. Futures geven je naast dit recht ook de verplichting om de onderliggende waarde te kopen of verkopen.

Voor het berekenen van de initial margin van een optie op een onderliggende waarde worden er 16 risicoscenario's beschouwd. Er worden eerst 14 scenario's beschouwd waarin voor elk scenario een stijgende of dalende beweging van de volatiliteit gecombineerd wordt met een stijging, daling of geen beweging van de prijs van de onderliggende waarde met 1/3, 2/3 of 3/3 van een bepaalde range. Daarnaast worden nog 2 extreme scenario's beschouwd met een extreme stijging en daling van de prijs.
Vervolgens wordt met een options pricing model de theoretische huidige waarde van de optie berekend en ook voor elk scenario de theoretische waarde van de optie aan het einde van de handelsdag. Het verschil tussen de prijs aan het begin en eind van een dag is de risk value. Voor de extreme scenario's geldt dat de risk value voor 30% bepaald wordt door de prijs aan het eind van de handelsdag voor dat scenario, en voor 70% door de prijs aan het begin van de dag. Dit vanwege de zeldzaamheid van deze extreme scenario's.
Een voorbeeld van een uitwerking van zulke scenario's staat in onderstaand figuur.

Value	Loss	Scenario
1	-$ 80	Futures Price Unchanged; Volatility up the Volatility Scan Range
2	$ 120	Futures Price Unchanged; Volatility down the Volatility Scan Range
3	-$ 320	Futures up 1/3 the Price Scan range; Volatility up the Volatility Scan Range
4	-$ 120	Futures up 1/3 the Price Scan range; Volatility down the Volatility Scan Range
5	$ 130	Futures down 1/3 the Price Scan range; Volatility up the Volatility Scan Range
6	$ 320	Futures down 1/3 the Price Scan range; Volatility down the Volatility Scan Range
7	-$ 600	Futures up 2/3 the Price Scan range; Volatility up the Volatility Scan Range
8	-$ 400	Futures up 2/3 the Price Scan range; Volatility down the Volatility Scan Range
9	$ 320	Futures down 2/3 the Price Scan range; Volatility up the Volatility Scan Range
10	$ 490	Futures down 2/3 the Price Scan range; Volatility down the Volatility Scan Range
11	-$ 900	Futures up 3/3 the Price Scan range; Volatility up the Volatility Scan Range
12	-$ 710	Futures up 3/3 the Price Scan range; Volatility down the Volatility Scan Range
13	$ 470	Futures down 3/3 the Price Scan range; Volatility up the Volatility Scan Range
14	$ 630	Futures down 3/3 the Price Scan range; Volatility down the Volatility Scan Range
15	-$ 670	Futures up extreme (3 times the Price Scan range) - Cover 30% of loss
16	$ 290	Futures down extreme (3 times the Price Scan range) - Cover 30% of loss

Figuur 4: Voorbeeld scenario's van een optie op een future

De initial margin is dan uiteindelijk het maximum van het verwachte verlies van alle 16 scenario's. In formulevorm ziet dit eruit als volgt met P de set gegenereerde scenario's:

$$\rho_{\mathrm{P}}(X) = \sup\{\mathrm{E}_P(-\Delta X/(1+r)) \mid P \in \mathrm{P}\}$$

Deze margin geldt voor alle opties in de portfolio met dezelfde onderliggende waarde.

2.3 SEC margin rules

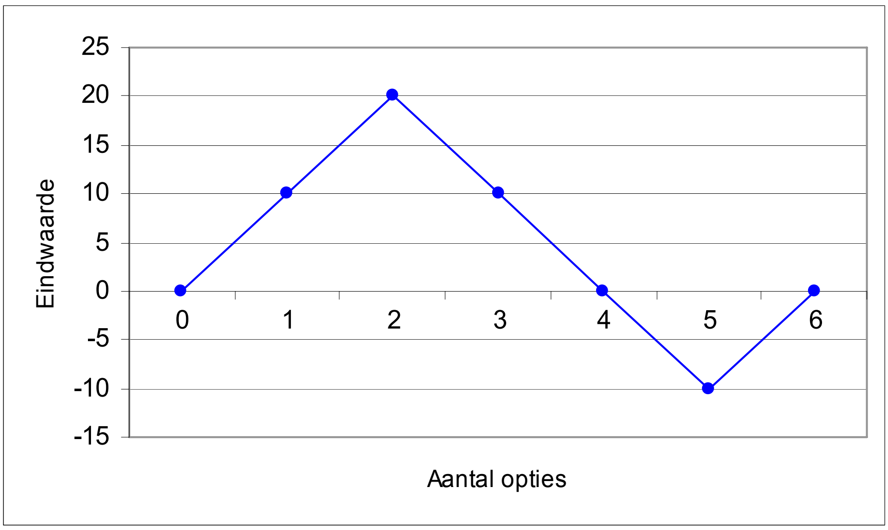
Waar bij SPAN de margin wordt bepaald op basis van de stochastische variabelen die de winst of verlies van de portfolio voorstellen, wordt bij de SEC margin rules de margin bepaald op basis van de effecten zelf die in een portfolio zitten.

Het doel van deze margin rules is hetzelfde als die van het margin system SPAN, alleen de berekening geschiedt op een andere manier. Voor het kopen van opties geldt weer dat daar geen margin voor vereist is. Het kopen van een optie wordt ook wel aangeduid als een 'long' positie, terwijl verkopen wordt aangeduid als een 'short' positie.

Beschouw als voorbeeld de volgende portfolio: 2 long calls met uitoefenprijs 10, 2 short calls met uitoefenprijs 20, 3 short calls met uitoefenprijs 30, 4 long calls met uitoefenprijs 40 en 1 short call met uitoefenprijs 50. Hierbij wordt uitgegaan van Europese opties met gelijke einddatum zodat de opties niet tussentijds uitgeoefend kunnen worden. Stel dat de genoemde calls als onderliggende waarde een bepaald aandeel *S* hebben. De houder van deze portfolio heeft dus 6 call opties in zijn bezit (long) en heeft 6 call opties verkocht oftewel geschreven (short). Ter overzicht de volgende tabel:

Uitoefenprijs	Long	Short
10	× 2	
20		× 2
30		× 3
40	× 4	
50		× 1
Totaal:	180	180

De waarde van *S* op de einddatum bepaalt dan welke opties er uitgeoefend worden. Zolang de waarde van *S* onder de 20 blijft, zal de houder van de portfolio geen opties tegen hem uitgeoefend zien worden want onder die grens heeft hij alleen opties in zijn bezit. De waarde van de portfolio zal dan ook niet negatief worden. Als de waarde van *S* op de einddatum echter tussen de 20 en 30 uitkomt, kunnen de short calls met uitoefenprijs 20 tegen hem uitgeoefend worden. Hij zal dan één of twee aandelen *S* moeten verkopen voor de uitoefenprijs van 20. Om het aandeel *S* in zijn bezit te krijgen, kan hij zijn eigen call met uitoefenprijs 10 gebruiken. Hij betaalt dus 10 voor het aandeel want die optie heeft hij in zijn bezit en hij ontvangt er 20 voor want die optie heeft hij verkocht. De portfoliowaarde is dan 10. Of het dubbele als beide short calls tegen hem uitgeoefend worden.
Naarmate de waarde van *S* toeneemt, zullen er meer short calls tegen de houder van de portfolio uitgeoefend worden maar de long calls worden ook meer waard en daaruit volgt dat de uiteindelijke waarde van deze portfolio nooit lager zal zijn dan in onderstaande grafiek.



Figuur 5: Eindwaarde portfolio bij uitoefening van x aantal opties

Er is te zien dat de uiteindelijke waarde van de portfolio nooit onder de –10 terechtkomt. Als de waarde van *S* bijvoorbeeld tussen de 30 en 40 komt te liggen, kunnen de 2 short calls van 20 en de 3 short calls van 30 tegen de houder uitgeoefend worden. Hij ontvangt daar 2 × 20 + 3 × 30 = 130 voor en het kost hem maximaal 2 × 10 + 3 × 40 = 140 om de aandelen met zijn long calls te kopen. Dit geeft 130 – 140 = –10.

Bovenstaand voorbeeld houdt in dat er een margin vereist zou zijn van hoogstens 10. Onder de SEC methode wordt bovenstaande portfolio echter gerepresenteerd als een portfolio van call spreads (decompositie). Dit betekent dat er voor elke gekochte optie (long) een optie van hetzelfde type verkocht (short) wordt (samen een spread). Er geldt voor zo'n spread dat er geen margin vereist is als de uitoefenprijs van de long side (*L*) kleiner is dan de strike van de short side (*S*). Als dit niet het geval is, is er een margin vereist van *L* – *S*.

De margin die dus daadwerkelijk vereist is voor een portfolio is de som van de margins van elke spread in een decompositie. De spreads worden zodanig gevormd dat de margin zo klein mogelijk is. Voor een portfolio met verschillende opties met verschillende uitoefenprijzen wordt er hier van uitgegaan dat de gezamenlijke uitoefenprijzen van de long calls gelijk is aan die van de short calls zoals ook in bovenstaand voorbeeld (beide 180) het geval is.
De minimale margin van zo'n portfolio is te bepalen met een lineair programmeringsprobleem. Neem $SPR_{L,S}$ een spread bestaande uit een long call C_L en short call C_S. Zo'n spread wordt ook wel genoteerd als $C_L - C_S$. Voor een portfolio *A* met opties met een eindig aantal combinaties van uitoefenprijzen $n_{L,S}$ kan de margin berekend worden met:

$$\inf_{n_{L,S}} \sum_{L,S,L\neq S} n_{L,S}(L-S)^{+}$$

onder de voorwaarden dat voor alle $L, S, L \neq S$ geldt dat $n_{L,S} \geq 0$ en de waarde van de portfolio $A = \sum_{L,S,L\neq S} n_{L,S} SPR_{L,S}$.

Bovenstaande spreads zijn de standaardrisico's waarvoor dus op een simpele manier de vereiste margin te berekenen is. Deze spreads vormen de basis voor de berekening van de margin voor algemene portfolio's. Naast call opties op dezelfde onderliggende waarde en dezelfde expiratiedatum, kan deze methode ook gebruikt worden voor portfolio's met gelijkwaardige put opties.

In het bovenstaande voorbeeld is de vereiste margin dan gelijk aan 30 bij de volgende decompositie:

Uitoefenprijs:		
Long	Short	Margin
10	20	0
10	20	0
40	30	10
40	30	10
40	30	10
40	50	0 +
		30

Deze 30 ligt een stuk hoger dan de laagst mogelijke toekomstige waarde van de portfolio.

Samengevat moet men volgens de SEC margin rules:

1. zijn of haar rekening waarderen volgens de marktwaarde,
2. de marktwaarde van de opties (long of short) op de rekening in mindering brengen,
3. de verschillende margins voor de spreads op de rekening in mindering brengen,
4. controleren of het saldo op de rekening niet negatief is.

3 Eigenschappen van een coherente risicomaatstaf

Volgens het artikel zijn er vier gewenste eigenschappen te noemen voor een risicomaatstaf $\rho(X)$ en wordt de maatstaf coherent genoemd als aan alle vier de eigenschappen wordt voldaan. Deze eigenschappen zijn gegeven in de vorm van de volgende axioma's:

I. Translation invariance: $\rho(X + \alpha \cdot r) = \rho(X) - \alpha$
Dit houdt in dat het optellen (of aftrekken) van een bedrag α bij de initiële portfolio en dit investeren in een veilig instrument gelijkstaat aan het verlagen (of verhogen) van de risicomaatstaf met α.

II. Subadditivity: voor alle X_1 en X_2 geldt $\rho(X_1+X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$
Dit betekent dat de margin van twee aparte risico's nooit kleiner kan zijn dan de margin van de twee risico's samen.

III. Positive homogeneity: voor elke $\lambda \geq 0$ geldt $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$
De grootte van de portfolio heeft geen invloed op het risico van de portfolio.

IV. Monotonicity: voor alle X en Y met $X \leq Y$ geldt $\rho(Y) \leq \rho(X)$
Deze laatste gewenste eigenschap houdt in dat een portfolio met een hogere verwachte eindwaarde een kleinere margin vereist.

Deze axioma's krijgen tegenwoordig steeds meer aandacht in de financiële wereld. In [5] wordt zelfs beweerd dat een risicomaatstaf alleen als zodanig genoemd mag worden als aan deze axioma's wordt voldaan.

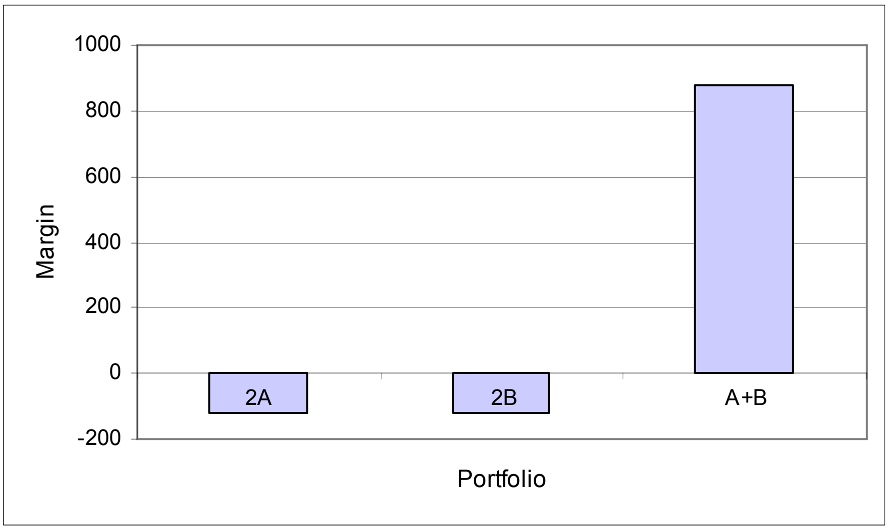
Van de drie behandelde risicomaatstaven voldoen zowel het SPAN margin system als de SEC margin rules aan de gewenste eigenschappen. De VaR voldoet aan alle eigenschappen behalve de tweede, subadditivity, en deze risicomaatstaf is dus niet coherent. Voorbeelden hiervan zullen in het volgende hoofdstuk aan bod komen.
Ondanks het feit dat de SEC margin rules aan de gewenste eigenschappen voldoet, wordt ook deze risicomaatstaf niet coherent genoemd. Dit vanwege het voorbeeld van paragraaf 2.3. Hier bleek dat de waarde van de portfolio nooit onder de –10 uit zou komen. Toch was er een margin vereist van 30 omdat er puur wordt gekeken naar de spreads zodat er teveel scenario's beschouwd worden waarvan enkele onmogelijke scenario's zijn. Er wordt dus te weinig rekening gehouden met standaard risico's waardoor de margin onnodig hoog kan zijn. Het SPAN margin system wordt daarentegen wel erkend als coherente risicomaatstaf.

4 Evaluatie value-at-risk

De value-at-risk is dus geen coherente risicomaatstaf omdat het niet aan de eigenschap van subadditivity voldoet. Ook zijn er nog andere punten van kritiek welke in dit hoofdstuk behandeld zullen worden.

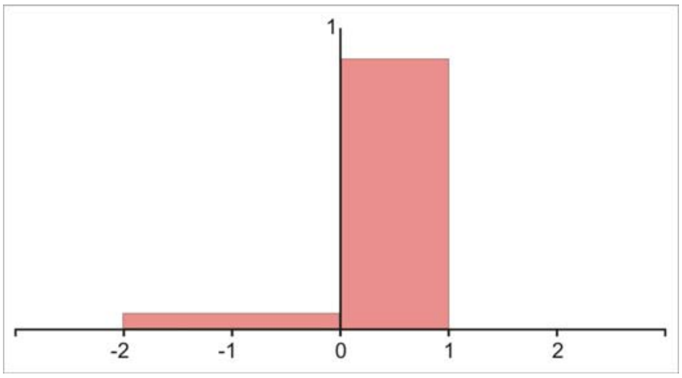
4.1 Subadditivity

Het gebrek aan subadditivity van de VaR blijkt uit het volgende voorbeeld. Beschouw twee binary opties op een aandeel (asset or nothing) met dezelfde uitoefendatum T. De eerste optie A (kosten u) betaalt 1000 uit als S_T, de waarde van het aandeel op tijdstip T, groter is dan een gegeven U, en anders niets. De tweede optie B (kosten l) betaalt 1000 uit als de waarde van het aandeel op tijdstip T kleiner is dan L (met $L < U$), en anders niets.
Als L en U bijvoorbeeld zo gekozen worden dat $P(S_T < L) = P(S_T > U) = 0.008$ kan er vervolgens gekeken worden naar de 1% VaR van de toekomstige netto waardes van een portfolio met 2 geschreven opties A en een portfolio met 2 geschreven opties B. Deze zijn respectievelijk $-2 \cdot u$ en $-2 \cdot l$ voor beide portfolio's (met r gelijk aan 0). Voor een portfolio met 1 geschreven optie A en 1 geschreven optie B is de 1% VaR echter gelijk aan $1000 - l - u$. Dit omdat $P(\{S_T < L\} \cup \{S_T > U\}) = 0.016$ en de kans dat er 1000 uitbetaald moet worden dan dus groter is dan 1%. Uit dit voorbeeld blijkt dat de margin van twee aparte risico's kleiner is dan de margin van twee risico's samen. Zie figuur 6.



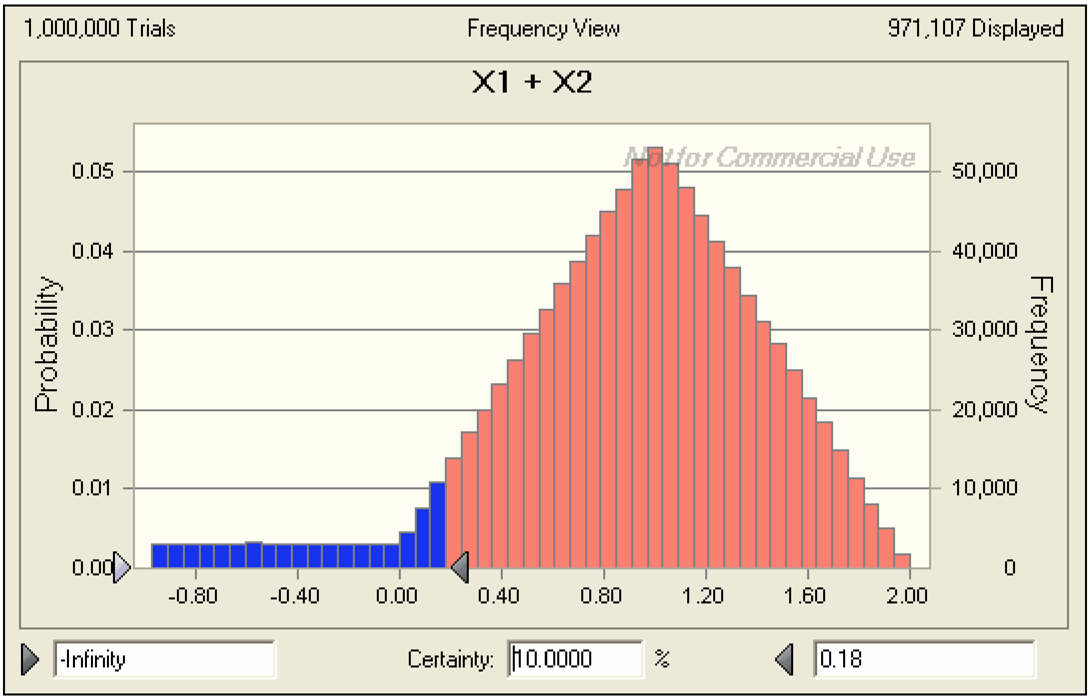
Figuur 6: Vereiste margin door ontbreken subadditivity bij de VaR

Beschouw voor een tweede voorbeeld 2 onafhankelijk gelijkverdeelde stochastische variabelen X_1 en X_2 met dezelfde dichtheid 0.90 op het interval [0,1] en dezelfde dichtheid 0.05 op het interval [–2,0] zoals in figuur 7.



Figuur 7: Verdeling stochasten X_1 en X_2

Deze stochastische variabelen stellen een toekomstige netto waarde voor met een positieve verwachting, welke mogelijk een interessante investering vormen.
De 10% value-at-risk van deze variabelen zijn gelijk aan 0 terwijl voor de 10% value-at-risk van $X_1 + X_2$ geldt dat deze zeker groter is dan 0 aangezien een convolutie van de twee stochasten leidt tot een verschuiving van het zwaartepunt van de verdeling naar rechts. Om dit te illustreren is een simulatie uitgevoerd met behulp van het programma Crystal Ball waaruit bleek dat de 10% VaR van $X_1 + X_2$ gelijk is aan 0.18 (zie figuur 8).



Figuur 8: De 10% value-at-risk van $X_1 + X_2$

Normaal gesproken zorgt diversificatie voor de spreiding van risico en zou dus een lagere margin tot gevolg moeten hebben. Bij de VaR is dit echter niet altijd het geval.

4.2 Concentratie van risico's

Naast het gebrek aan subadditiviteit is de value-at-risk ook niet in staat om de concentratie van risico's te herkennen wat uit het volgende voorbeeld over kredietrisico blijkt.
Stel dat de basisrente gelijk aan 0 is en de credit spread[2] op alle bedrijfsobligaties is gelijk aan 2%. Onafhankelijk van elkaar kan het voorkomen dat de ondernemingen niet in staat zijn om aan hun betalingsverplichtingen te voldoen (default) met kans 1%. Als er dan een bedrag van 1.000.000 geleend wordt tegen de basisrente om te investeren in obligaties van één bedrijf, is de 5% VaR gelijk aan –(2% × 1.000.000) = –20.000 wat negatief is en dus is er geen risico. Als er echter ten behoeve van diversificatie het bedrag van 1.000.000 geïnvesteerd wordt in 100 verschillende ondernemingen, verandert de value-at-risk. Kijken we naar de kans dat er op z'n minst twee ondernemingen niet aan hun betalingsverplichtingen kunnen voldoen, zien we het volgende. Maximaal 98 ondernemingen betalen de investering van 10.000 terug inclusief 200 rendement. Minimaal 2 ondernemingen doen dat niet dus dat geeft een minimaal verlies van 2 × 10.000 – 98 × 200 = 400. Met *X* het aantal defaults geldt dat:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dus P(default ≥ 2) = 1 – P(default = 1) – P(default = 0)
= 1 – 100·($0{,}01^1$)·($0{,}99^{99}$) – 1·($0{,}01^0$)·($0{,}99^{100}$)
= 0,2642

De kans is dus ruim 26% dat er minimaal twee ondernemingen niet aan hun betalingsverplichtingen kunnen voldoen en de toekomstige waarde van de portfolio is dus negatief met een kans groter dan 5%. Ook hier heeft diversificatie er toe geleid dat de VaR is gestegen maar ook is het risico van beleggen in één onderneming niet door de risicomaatstaf geconstateerd.

[2] Credit spread is het verschil in rendement op bedrijfsobligaties en staatsobligaties vanwege het hogere risico dat over het algemeen wordt gelopen bij het investeren in bedrijfsobligaties.

4.3 Kwantielen

Uit onderzoek van [6] waarin een portfolio investeringsprobleem geanalyseerd is op basis van de VaR methode blijkt dat deze methode aanzet tot het investeren in meer risicovolle activa dan dat men zou doen zonder deze beperking. Ook zijn in het geval van grote verliezen de verliezen groter dan zonder de VaR beperking. Dit komt door het feit dat de VaR methode zich, doordat het op kwantielen gebaseerd is, slechts bezighoudt met de kansen op verlies, niet met de grootte ervan. Het gevaar dat dit met zich meeneemt blijkt ook uit onderstaand voorbeeld.

Met gebruik van de volgende gegevens over aandeel S:

Aandeelprijs op t = 0	S_0	100
Drift van het aandeel	μ	0.1
Volatiliteit van het aandeel	σ	0.31
Risicovrije rente	r	0.05
Handelsdagen per jaar	n_j	256
Handelsdagen looptijd	n_l	7
Looptijd in jaren	n_l/n_j	7/256

en de verandering in aandeelprijs gegeven door de volgende formule:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

waarbij W_t een standaard Brownian motion onder kansruimte P is waar prijsveranderingen random zijn en normaal verdeeld. De oplossing van bovenstaande differentiaalvergelijking geeft dan de aandeelprijs op tijdstip t:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

Omdat W_t normaal verdeeld is met verwachting 0 en variantie t, kunnen nu de verschillende kwantielen van de verdeling van de aandeelprijs berekend worden op tijdstip t = 7, zoals:

$$P(S_t \leq 87) = 0.0030$$
$$P(S_t \leq 88) = 0.0058$$
$$P(S_t \leq 89) = 0.0107$$

Een handelaar die vervolgens wenst om 1 miljoen te verdienen en hierbij boven de drempel van de 1% VaR te blijven, kan de volgende portfolio samenstellen (met een looptijd van 7 dagen):

1. Het kopen van 1 miljoen call opties met een uitoefenprijs van 87,
2. Het schrijven van 1 miljoen call opties met een uitoefenprijs van 88,
3. Het financieren van de call opties door genoeg put opties met een uitoefenprijs van 87 te schrijven.

Als de prijs van het aandeel aan het einde van de looptijd dan op z'n minst 88 is, heeft de handelaar 1 miljoen verdiend. De kans hierop is 99.42%.
De handelaar verliest alleen geld als de uiteindelijke prijs van het aandeel gelijk aan 87 of lager is. De kans dat dit gebeurt is 0.30% wat dus minder dan 1% van de VaR is. Er is volgens de risicomaatstaf dus geen risico omdat deze alleen op de kans op verlies gericht is, met kleine kansen wordt geen rekening gehouden. Toch heeft deze portfolio de potentie enorme verliezen te veroorzaken.

Volgens het Black-Scholes model is de marktprijs van een call optie met uitoefenprijs 87 gelijk aan 13.12 en die van een call optie met uitoefenprijs 88 gelijk aan 12.13 wat blijkt uit gebruik van de volgende formule:

$$C(S,T) = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

met

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{en} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

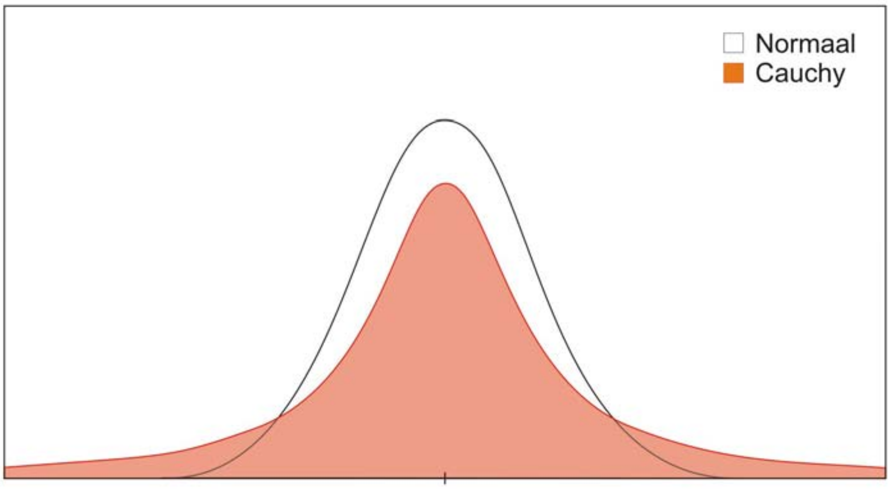
C(S,T) geeft de waarde van een call optie bij een aandeelprijs van *S* en looptijd *T* en een uitoefenprijs van *K*. Verder is *N* de standaard normale cumulatieve verdelingsfunctie.
Dus het kopen en schrijven van de call opties kost de handelaar 993,988.2 en omdat de marktprijs van de put gelijk is aan 0.0044 betekent dit dat hij 226,390,369 put opties dient te schrijven. Het gevolg hiervan blijkt uit de volgende tabel:

Aandeelprijs op t = 7	Marktprijs portfolio (in mln)
90	1
89	1
88	1
87	0
86	–226.39
85	–452.78
84	–679.17

Vanaf het moment dat de aandeelprijs onder de 87 komt, is te zien dat er enorme verliezen ontstaan terwijl deze portfolio door de VaR nooit als risicovol is herkend.

4.4 Normale verdeling

Een laatste tekortkoming van de value-at-risk is dat er van uitgegaan wordt dat de veranderingen in marktrisicofactoren normaal verdeeld zijn. Uit empirisch onderzoek is echter gebleken dat opbrengsten een grotere kurtosis (de vlakheid van de verdeling in vergelijking tot de normale verdeling) en zwaardere staarten bevatten dan een normale verdeling, zoals bijvoorbeeld een Cauchy-verdeling, zie figuur 7.
Extreme veranderingen in de risicofactoren zijn hierdoor een stuk waarschijnlijker dan men zou vermoeden onder de aanname van een normale verdeling.



Figuur 9: Normale verdeling vergeleken met Cauchy-verdeling

5 Alternatief voor de value-at-risk

Een in de literatuur veelgenoemd alternatief voor de value-at-risk die wel coherent is, is de expected shortfall (ES). De expected shortfall lijkt veel op de tail conditional expectation (TCE) en de worst conditional expectation (WCE) die in het artikel genoemd is als coherent alternatief voor de VaR. Conditional value-at-risk (CVaR) is een andere veelgebruikte naam voor de ES.

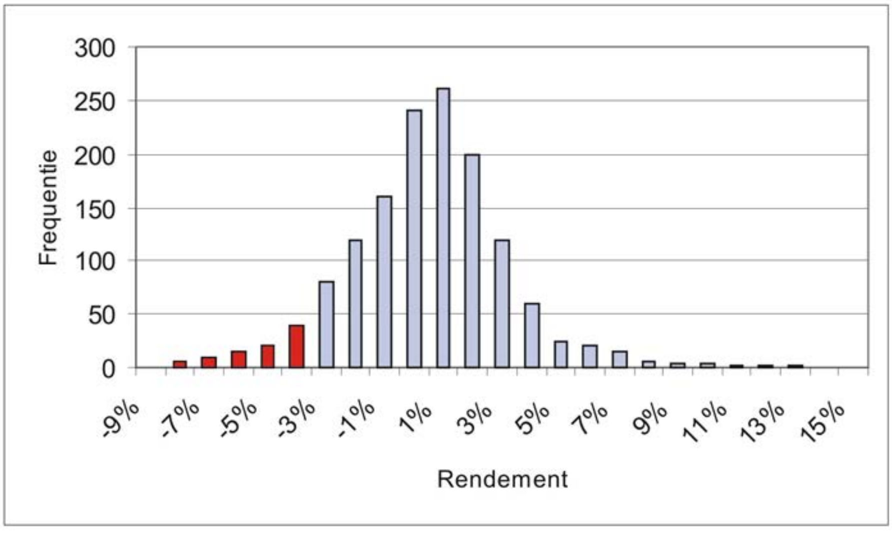
De methode geeft het verwachte verlies gegeven dat het verlies groter is dan de value-at-risk. De expected shortfall is dus het gemiddelde van de $\alpha\%$ grootste verliezen terwijl de VaR het minimum van die $\alpha\%$ grootste verliezen voorstelt. In andere woorden, de VaR vertelt ons wat we kunnen verwachten te verliezen indien er geen grote verliezen optreden, de ES vertelt ons wat we kunnen verwachten te verliezen indien dit wel gebeurt.

Het verwachte verlies van de $\alpha\%$ grootste verliezen kan geschat worden door:

$$ES_n^{(\alpha)}(X) = -\frac{\sum_{i=1}^{w} X_{i:n}}{w}$$

Dit geeft –(het gemiddelde van de $\alpha\%$ uitkomsten van X_i) en wordt de $\alpha\%$ expected shortfall genoemd. Beschouw als voorbeeld onderstaand figuur waarin de 5% ergste gevallen bestaand uit de rendementen van –3% tot –7%. Het gewogen gemiddelde hiervan is dan de 5% expected shortfall:

$$-(5\cdot 7\% + 10\cdot 6\% + 15\cdot 5\% + 20\cdot 4\% + 40\cdot 3\%)/90 = -4.11\%.$$



Figuur 10: Histogram met verwachte opbrengsten van een portfolio

De expected shortfall kan toegepast worden op alle liquide activa en kansverdelingen en voldoet wel aan de eigenschap van subadditivity. Om dit aan te tonen kunnen de twee variabelen *X* en *Y* en een aantal *n* simultane realisaties $\{(X_i, Y_i)\}_{\{i=1,\ldots,n\}}$ beschouwd worden.

Er geldt dan:

$$ES_n^{(\alpha)}(X+Y) = -\frac{\sum_{i=1}^{w}(X+Y)_{i:n}}{w} \leq -\frac{\sum_{i=1}^{w}(X_{i:n}+Y_{i:n})}{w} = ES_n^{(\alpha)}(X) + ES_n^{(\alpha)}(Y)$$

Omdat de expected shortfall ook aan de overige axioma's voldoet [5] kan dit een coherente risicomaatstaf genoemd worden.

6 Conclusies

Het grote voordeel van de risicomaatstaf value-at-risk is dat deze toegepast kan worden op elk willekeurig financieel instrument. Daarnaast bevat de VaR ook een schatting van toekomstige gebeurtenissen. Dit wordt samengevat in een enkel getal welke het maximale verlies aangeeft met een bepaalde kans.

Bovenstaande is niet van toepassing op het margin system SPAN en de SEC margin rules. Deze risicomaatstaven kunnen alleen toegepast worden op het handelen in opties. Deze maatstaven voldoen echter wel aan alle vier de axioma’s die in dit verslag zijn behandeld. Deze eigenschappen bepalen of een risicomaatstaf coherent is. De value-at-risk voldoet slechts aan drie van deze axioma’s. In dit werkstuk is aangetoond dat de VaR niet beschikt over de eigenschap van subadditivity. Deze eigenschap is noodzakelijk voor het vaststellen van de kapitaalvereisten om ondernemingen tegen marktrisico’s te beschermen.

Het gebrek aan subadditivity kan er onder de value-at-risk toe leiden dat een spreiding van risico door diversificatie juist zorgt voor een groter risico. Dit zou niet moeten en hierdoor kan de VaR in sommige gevallen de financiële instabiliteit in een organisatie juist laten toenemen in plaats van afnemen.

Dat de VaR op zichzelf niet betrouwbaar genoeg is in de financiële wereld blijkt ook uit het feit dat het akkoord van Basel alleen een aangepaste versie van de VaR toestaat. Volgens dit akkoord dient de risicomaatstaf onder andere vermenigvuldigd te worden met een veiligheidsfactor van 3.

Vanwege het kleinere toepassingsgebeid van het margin system SPAN en de SEC margin rules is in dit werkstuk gepleit voor een alternatieve maatstaf om marktrisico’s te kwantificeren. Een goed alternatief is de expected shortfall. Deze risicomaatstaf geeft het verwachte verlies indien er grote verliezen optreden. In tegenstelling tot de VaR voldoet de expected shortfall wel aan alle vier de axioma’s. Het kan dus een coherente risicomaatstaf genoemd worden en het geeft een betere inschatting van de marktrisico’s van portfolio’s dan de VaR.

Bronvermelding

[1] Artzner P., Delbaen F., Eber J. & Heath D. (1998) *Coherent Measures of Risk*

[2] Delbaen F. (2000) *Coherent Risk Measures*

[3] *Delbaen F. (2003) Risk Measures or Measures that Describe Risk?*

[4] Basak S. & Shapiro A. (2001) *Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices*

[5] Acerbi C. & Tasche D. (2001) *Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value-at-Risk*

[6] Boyle P., Hardy M. & Vorst T. (2005) *Life After VaR*

[7] CCRO (2002) *Valuation and Risk Metrics*

[8] Basel Committee on Banking Supervision (2005) *Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks*

[9] Glasserman P., Heidelberger P. & Shahabuddin P. (2000) *Efficient Monte Carlo Methods for Value-at-Risk*

[10] Rogachev A. (2002) *Dynamic Value-at-Risk*

[11] Oesterreichische Nationalbank (1999) *Guidelines on Market Risk, Volume 5, Stress Testing*

[12] Cuoco D. & Liu H. (2004) *An Analysis of VaR-based Capital Requirements*

[13] Harper D. (2004) *Introduction to Value at Risk (VAR) – Part 1*
http://www.investopedia.com/articles/04/092904.asp (01–09–2006)

[14] Zielinski S. (2004) *How Does Your Margin Grow?*
http://ww.investopedia.com/articles/optioninvestor/04/120904.asp
(01–09–2006)

[15] Dunbar N. (2002) *Value-at-Risk: down but not out*
http://www.risk.net/public/showPage.html?page=7901 (01–09–2006)

[16] *Futures Margin Information*
http://www.preferredtrade.com/cf/futures_margininfo.cfm
(01–09–2006)

[17] *Components of SPAN*
http://www.cme.com/clearing/rmspan/span/compont2480.html
(01–09–2006)

[18] *Margin and Escrow Receipts*
http://www.cboe.com/Institutional/Margin.aspx (01–09–2006)